PUBLICACIONES DE LA ESCUELA MODERNA

ELEMENTOS de ARITMÉTICA

POR

PARAF-JAVAL

SEGUNDO VOLUMEN

CURSO MEDIO

Administración: Calle Bailén, 56
BARCELONA

ELEMENTOS DE ARITMÉTICA

SEGUNDO VOLUMEN

CURSO MEDIO

PUBLICACIONES DE LA ESCUELA MODERNA

ELEMENTOS DE ARITMÉTICA

POR

PARAF-JAVAL

SEGUNDO VOLUMEN

CURSO MEDIO

1.ª PARTE. — La aritmética, su base, su objeto.

2.ª PARTE. — Unidades fundamentales, sistema métrico.

3.ª PARTE. — Divisibilidad, potencias, raíces, fracciones, cálculo mental é instrumentos de cálculo.

4.ª PARTE. — Relaciones, proporciones, logaritmos, reglas de tres, particiones proporcionales, etc.

5.ª PARTE. — La conservación de los números, los números positivos y negativos, la aritmética generalizada, conclusión.

Administración: Calle Bailén, 56

BARCELONA

Imp. Atlas Geográfico, Consejo de Ciento, 140.—Barcelona

ÍNDICE

CUARTA PARTE

QUINTA PARTE

PREFACIO

Este volumen de ELEMENTOS DE ARITMÉTICA, CURSO MEDIO, sigue al VOLUMEN DE LOS PRINCIPIANTES. El VOLUMEN DE LOS PRINCIPIANTES comprende la *numeración y las cuatro reglas,* el CURSO MEDIO comprende *las unidades fundamentales y el sistema métrico,* la *divisibilidad, las potencias, las raíces y las fracciones, las relaciones. las proporciones, las progresiones, los logaritmos y sus aplicaciones, la teoría de la conservación de los números, la de los números positivos y negativos y una indicación de la generalización de la aritmética* destinada á preparar á los alumnos para el estudio del *álgebra.*

Como en el VOLUMEN DE LOS PRINCIPIANTES, hemos juzgado bueno en el CURSO MEDIO hacer que precediera á los diferentes capítulos una indicación demostrando claramente el encadenamiento de las ideas objeto de la aritmética. Conviene no olvidar jamás que sucede con la ciencia de los números lo que con las otras ciencias (conocimientos). *Su base es experimental y su objeto es utilitario.* Llamamos particularmente la atención de los profesores sobre esta primera parte destinada á guiar su enseñanza. Los diferentes párrafos deberán ser repetidos y comentados alternando con el estudio de los párrafos correspondientes de las otras partes, y habrán de ser revisados aún al final de los estudios. Los alumnos deberán ejecutar frecuentemente ejercicios y redacciones para asegurarse de que esta primera parte ha sido bien comprendida por todos.

Conviene insistir particularmente sobre la conservación de los números y sobre la noción de transformismo, que es universal. Si se escribe, por ejemplo, $100 + 1 = 101$, puede hacerse observar que no se trata de una unidad «creada», sino que es imposible añadir á un grupo una unidad sin que ésta haya sido tomada de alguna parte donde existía bajo esta forma ó bajo otra forma diferente. Del mismo modo, si se escribe $100 - 1 = 99$, puede observarse que no se trata de una unidad «aniquilada», sino que es imposible quitar de un grupo una unidad sin que esta unidad sea puesta en otra parte bajo esta forma ú otra diversa.

Hemos adoptado para la sucesión de las ideas el orden que nos ha parecido más lógico. Hemos comenzado por las unidades fundamentales y el sistema métrico, como nociones nidispensables para los ejercicios y problemas de las otras partes.

Los ejercicios y problemas colocados al final de cada parte siguen el orden de los párrafos que habrán de acompañar. Cada parte termina con un cuadro recapitulativo.

Este CURSO MEDIO puede emplearse lo mismo para los alumnos de las clases pequeñas que para los de clases superiores. A los profesores corresponde al hacer sus programas prescindir para las clases pequeñas de las demostraciones más complejas, que habrán de emplearse después. Nos hemos esforzado, no obstante, en poner siempre las demostraciones bajo la fórmula más sencilla.

Para no insistir sobre el objeto práctico de la aritmética, los profesores deberán escoger sus problemas y sus preguntas en las circunstancias de una vida usual razonable, y, á este efecto, bastará seguir las indicaciones dadas en nuestros ejercicios y problemas. Cuanto menos ejercicios y problemas comerciales y de concurrencia hagan hacer, mejor.

Es de la mayor importancia enseñar á los alumnos á que planteen ellos mismos los problemas, y hacerles comprender bien la superioridad de un *matemático*, es decir, del que sabe contar, calcular y medir, sobre los ignorantes, y la superioridad de un *matemático consciente*, es decir, del que sabe comprender el valor de la matemática (ciencia del cálculo y de la medida), sobre los inconscientes.

Todo individuo debe ser preparado desde la infancia, en su interés como en el de sus contemporáneos, á concurrir razonablemente y según sus fuerzas á la selección universal de la substancia en provecho de la substancia humana razonable. Para ello, es necesario estar iniciado en la alegría del cálculo y de la medida.

Agosto, 1905.

ELEMENTOS DE ARITMÉTICA

SEGUNDO VOLUMEN

PRIMERA PARTE

— La Aritmética
— Su base
— Su objeto

PRIMERA PARTE

La aritmética, su base, su objeto

La experiencia y la utilidad

Hemos demostrado en otra ocasión que *todas las ciencias son experimentales y utilitarias.* No puede ser de otro modo.

En efecto, todos los conocimientos vienen por los sentidos. Un individuo que naciera privado del uso de todos los sentidos, no podría entrar en comunicación con el medio exterior ni con su medio interior. Semejante individuo no conocería. Todos los conocimientos *(ciencias)* son, pues, el resultado de la experiencia.

Además, sin la experiencia la vida sería imposible. Se ha hecho notar que nuestros sentidos no nos engañan, y que la lógica resulta de la selección natural. En efecto, un individuo no existe sino porque todos sus antepasados, en series innumerables, habiendo obrado conforme á las indicaciones de sus sentidos, han durado, se han desarrollado y perpetuado, y así han podido transmitir á los descendientes sus facultades y sus conocimientos. Por lo demás, la experiencia de todos los instantes nos muestra que basta descuidar durante un corto espacio de tiempo las indicaciones de nuestros sentidos para padecer y hasta para morir. Así sucedería, por ejemplo, si no hiciéramos caso de una sensación de compresión, de quemadura, de sofocación, etc., etc. La ciencia (conocimiento) que resulta de la experiencia termina en la utilidad. Es natural, necesaria, útil.

Se ha hecho observar, además, que precisamente esa utilidad práctica de los conocimientos adquiridos por los sentidos, ha motivado, desde el origen, su conservación y su catálogo, de tal manera, que el principio de la ciencia se pierde en la antigüedad más remota. Cuando nuestros lejanos antepasados distinguieron las piedras entre sí, reconociendo las que podían servirles para ciertos usos, comenzaron así las primeras clasificaciones mineralógicas. Cuando distinguieron entre sí los vegetales y los animales, reconociendo á continuación los que podían serles útiles y los que podían perjudicarles, establecieron las primeras clasificaciones botánicas y zoológicas, y podría demostrarse del mismo modo que el punto de partida de la química, de la física y de todas las ciencias puede ser hallado profundizando en la lenta y penosa acumulación de la experiencia ancestral.

Puede, pues, afirmarse que todo conocimiento proviene de nociones naturales, experimentales, justas, lógicas y demostrables, y que las concepciones sobrenaturales, en desacuerdo con la experiencia, absurdas, ilógicas, é indemostrables han sido siempre obstáculos al progreso y al bienestar. Un individuo razonable debe, pues, someter todo á la comprobación de los sentidos, debe de hacer física, rechazando la metafísica, es decir, lo que está fuera de la física, del resultado de la experiencia, de la realidad.

La experiencia y la utilidad en aritmética

Como todas las demás ciencias, la aritmética es experimental y utilitaria, lo que vamos á demostrar en detalle. Todas las nociones que se hallan en su base, lo mismo que todas las que, en un momento dado, se emplean en el curso de una demostración cualquiera, provienen de la experiencia.

Como veremos, todas las partes de la aritmética tienen aplicaciones muy numerosas y variadas, y es imposible ocuparse de una ciencia cualquiera sin el auxilio de la aritmética, ya que en definitiva todas las ciencias van á parar á operaciones de medida y la medida es imposible sin la ciencia de los números.

La abstracción

No ha de confundirse la abstracción con la metafísica. La *abstracción* (del latín ABSTRACTUM=*salido de)* es la operación científica por excelencia. No hay ciencia sin abstracción.

Si se llaman *cuerpos, cosas* ú *objetos* todos los seres materiales que caen bajo nuestros sentidos, ó dicho más sencillamente, todo lo que podemos distinguir de cuanto nos rodea en un momento dado (considerando que un cuerpo puede componerse de cuerpos más pequeños), comprendemos fácilmente que estudiar los cuerpos es someterlos al examen de nuestros sentidos y anotar el resultado de este examen. Este examen permite darnos cuenta de las semejanzas y de las diferencias de los cuerpos entre sí y de uno ó varios cuerpos en momentos diferentes ó en posiciones diferentes.

Si sometemos un cuerpo al examen sucesivo de todos nuestros órganos de los sentidos (vista, tacto, oído, gusto, olfato) podremos notar nuestras sensaciones y las propiedades que tenga ese cuerpo para impresionarnos de diverso modo. Lo que llamaremos propiedades de los cuerpos, las catalogaremos, refiriéndolas á nuestros diferentes sentidos, en propiedades de color, de forma, de presión, de temperatura, de sonido, etc., etc. El conjunto de esas propiedades constituirá para nosotros la idea de cuerpo, y entonces podremos concebir el cuerpo como un conjunto de propiedades.

Habiendo diferentes cuerpos con propiedades comunes, es importante, para evitar la confusión, dar á estas propiedades comunes un mismo nombre, lo que ha conducido naturalmente á hacer el estudio de las diferentes propiedades de los cuerpos. Como es imposible estudiarlas todas á la vez en un mismo cuerpo ó en cuerpos diferentes, se ha llegado á estudiarlas unas después de otras, es decir, á olvidar voluntariamente, por ejemplo, todas las propiedades de uno ó de varios cuerpos, con excepción de una sola ó de varias, para comparar los cuerpos relativamente á esta ó á aquellas propiedades.

Olvidar voluntariamente todas las propiedades de uno ó de varios cuerpos, á excepción de una ó de varias, para pensar únicamente en esta ó en aquellas propiedades que se quieren estudiar es hacer *abstracción*. La abstracción es una operación que consiste en comparar una ó varias propiedades de los cuerpos, omitiendo de intento todas las demás.

Como se ve, *todas las ciencias son abstractas*. La abstracción es la esencia misma de la ciencia. No hay ciencia posible para quien quiere comparar los cuerpos, conocer sus semejanzas y sus diferencias considerándolas siempre en conjunto (cuerpo, reunión de propiedades) y sin ocuparse de los detalles (propiedades).

El químico que pesa cuerpos en una balanza, es decir, que voluntariamente olvida por un momento todas las propiedades de esos cuerpos á excepción de la del peso, ó sea la de necesitar cierto esfuerzo para separarlos de la tierra, esfuerzo que percibimos por medio de nuestros músculos (tacto) y medir por medio de una balanza (vista, tacto)—hace abstracción con el mismo título que el geómetra que se ocupa, por ejemplo, momentáneamente, de la forma de los cuerpos (vista, tacto) olvidando voluntariamente todas sus demás propiedades.

La abstracción en aritmética

El carácter de cada ciencia consiste en la ó las categorías de abstracciones estudiadas ó en la ó las categorías de cuerpos de que se estudia una ó varias abstracciones ó sucesivamente todas las abstracciones.

La abstracción que se estudia en *aritmética* es el *número,* es decir, la propiedad que tienen todos los cuerpos de reunirse en grupos más ó menos importantes.

Principios de la aritmética

Sabemos que la aritmética (del griego ARITMOS=*número,* y TECHNÉ=*ciencia*) es la ciencia de los números. Vamos á ver que todos los principios de la aritmética se derivan de la experiencia.

Se llaman *idénticos* unos cuerpos que no podemos distinguir los unos de los otros de otro modo que por su situación, lo que equivale á reconocer que todas sus propiedades, excepto las concernientes al hecho de estar en cierto sitio y no en otro, nos parecen ser las mismas. Hacemos notar aquí que decir en estas condiciones que dos cuerpos son idénticos, significa sencillamente que si esos dos cuerpos permutasen en lo que concierne á la situacion, no se podría encontrar diferencia desde el punto de vista de las propiedades entre el cuerpo que ocupaba una situación y el que le ha reemplazado. Sabemos, en efecto, que la situación modifica las propiedades de los cuerpos. Por ejemplo, el peso de un cuerpo terrestre varía según la distancia al centro de la Tierra.

Se llaman *iguales* unos cuerpos que consideramos con relación á ciertos caracteres comunes, omitiendo voluntariamente todos los demás. Una botella de cristal y una caja cuadrada de madera pueden ser iguales respecto de su capacidad.

En un grupo de objetos idénticos ó iguales, se llama *unidad* uno de los objetos que se encuentra actualmente entre los otros y que podríamos ver aisladamente. Se llama *pluralidad* el conjunto de los objetos que forma el grupo.

Se concibe que pueda tomarse una unidad que forme parte de una pluralidad y colocarla en otro lugar; que pueda tomarse otra unidad de esa misma pluralidad y ponerla también en otro lugar, y así sucesivamente. Se concibe igualmente que se pueda tomar una unidad que se encuentre en otro lugar y ponerla con las unidades de cierta pluralidad; que se pueda tomar otra unidad que se halle asimismo en otro lugar y ponerla también con las unidades de esta misma pluralidad, y así sucesivamente. De ahí la idea de que los grupos puedan ser *más ó menos* grandes (mayores ó menores), y la de que conviene dar nombres á todos los grupos comparando la pluralidad á una de las unidades que la forman. Se llama *número* al resultado de esta comparación.

Se concibe inmediatamente que es necesario dar nombres á todos los números y que es preciso dar el mismo nombre á los mismos números, so pena de producir confusiones.

La *numeración* es la operación que consiste en dar nombres á los números. Estos nombres pueden expresarse por medio de vocablos sonoros, y los sonidos de esos vocablos representados por palabras. Eso es lo que se llama *numeración hablada*. Esos nombres pueden representarse por signos, que es lo que se llama la *numeración escrita.*

Conviene dar nombres á todos los números sin olvidar ninguno. A este efecto se comienza por la unidad, y se da un nombre á esta unidad. Se le llama, por ejemplo, *uno,* y se le representa por el signo 1. Se añade en seguida una unidad á esta unidad, y se obtiene un nuevo número, que se llama, por ejemplo *dos* y que se representa por el signo 2. Se continúa añadiendo así una unidad al último número obtenido, á fin de obtener el número siguiente, y se llega á esta noción: *la continuación de los números es ilimitada,* puesto que puede siempre formarse un número superior á todo número dado, añadiendo á ese número una unidad.

Se verá muy pronto que si se da un nombre diferente y un signo diferente á cada número nuevo, se tendrá una cantidad de vocablos y de signos tan grande que sería imposible recordarla. Preciso es, pues, encontrar un *sistema de numeración* cómodo que permita recordar fácilmente los nombres y los signos que han de darse á todos los números.

Un sistema de numeración consiste generalmente en dar nombres á números, después á grupos de números y así sucesivamente, formando de ese modo unidades cada vez mayores de un número de veces ó de un número variable de veces. Se ha juzgado más cómodo en nuestros días escoger unidades cada vez mayores del mismo número de veces. Este número es de elección. El número de unidades décuples (de diez en diez veces mayores) tiende á ser adoptado, y tiene probablemente su origen en que los hombres han tenido naturalmente la idea de contar por sus dedos.

Este sistema que actualmente tiende cada vez más á ser adoptado, puede parecer mejor que ningún otro á los que, estando á él habituados, pueden difícilmente compararle á los otros sistemas desconocidos en la práctica, como, por ejemplo, los sistemas que consistieran en contar por octava, por docena, etc., es decir, que sus unidades aumenten ó disminuyan de ocho en ocho ó de doce en doce. Se ha hecho notar, por ejemplo, que el sistema duodecimal (unidades de 12 en 12) ó el sistema octaval (unidades de 8 en 8) tienen grandes ventajas. 12 tiene más divisores que 10, y 8 reproduce la serie tan frecuente en biología y en otros asuntos 2, 4, 8, 16, 32, 64, etc. Además 12 y 8 se encuentran también en las manos, que contienen (exceptuando los pulgares) 8 dedos y cada una 12 falanjes.

Como quiera que sea, conocido un sistema de numeración, es fácil concebir los otros. Nuestro VOLUMEN DE LOS PRINCIPIANTES se funda sobre el sistema decimal en uso en España.

Cuando no se tiene más que una sola unidad y ésta desaparece, lo que queda no es un número, porque no queda nada. Esta idea de «nada» está representada por la palabra cero y el signo 0. CERO, que significa en árabe *círculo* ó *espacio vacío,* no tiene valor por sí mismo. *Cero no es un número.* Esta palabra y el signo destinado á representar esta idea de «nada», tienen naturalmente su lugar en todos los sistemas de numeración, donde sirven para designar un lugar no ocupado. 10 significa una decena y no unidades, 208 significa dos centenas, ninguna decena y 8 unidades.

Por otra parte, por grande que sea un grupo, puede suponerse siempre un grupo mayor; de ahí la noción de *infinito*.

Se trata de comprender bien que las unidades pueden ser de diferentes órdenes de grandor, pero que una vez adoptado un sistema, es preciso atenerse á sus consecuencias. Habiendo convenido que en el sistema decimal las unidades son de 10 en 10 veces mayores ó menores, la sucesión de esas unidades en uno ó en otro sentido parece, pues, igualmente ilimitada. Se dirá una unidad, una decena, una centena, un millar, etc.; como se dirá, en sentido contrario, un únimo*, un décimo, un céntimo, un milésimo, etc.; pero cada una de esas unidades, aunque diferentes de las otras, será considerada como una unidad y utilizada como tal. Así como se dirá: «los cuerpos de todos los seres organizados están compuestos de cuerpos más pequeños llamados células, las cuales se componen de cuerpos más pequeños llamados plástidas ó de otro modo;» así también se dirá: «Las decenas están compuestas de unidades más pequeñas llamadas únimas, las cuales se componen ó pueden considerarse compuestas de unidades más pequeñas llamadas décimas, etc.» y así se llega á concebir la idea de *fracción*.

Una unidad cualquiera que forme parte de un grupo de unidades del mismo orden, puede ser considerada como una fracción de grupo, y recíproca-

---

* No hallando el autor aceptables las palabras *uno, unidad*, *primero,* para expresar la significación que tiene en francés la palabra *unième,* de acuerdo con él, hemos recurrido al neologismo español *únimo,* que reune las condiciones que exige la idea y que esperamos satisfará á profesores y alumnos. — (*Nota editorial*).

mente se concibe que una unidad de un orden cualquiera puede ser dividida en cierto número de partes iguales que constituirán unidades de un orden inferior. Si, por ejemplo, tenemos unas manzanas, estas manzanas podrán considerarse como unidades y podremos contar el número de las manzanas. Si, por el contrario, cortamos todas las manzanas en dos partes iguales, tendremos unidades de un orden inferior, mitades, y podremos contar el número de las medias manzanas, como antes pudimos contar el número de los únimos de manzanas. Así podríamos contar los tercios, los cuartos, los quintos, etc., si cortásemos cada manzana en 3, 4, 5, etc., partes iguales. Observaremos además que en la numeración decimal, diez décimos valen una unidad del orden superior, valen un únimo, y que un únimo dividido en 10 partes vale 10 décimos; del mismo modo, si en lugar de dividir la unidad en 10 partes, la divido en 3 partes, 3 de esas partes valdrán una unidad, y una unidad valdrá 3 de esas partes. Podría decir: «Un únimo vale 2 medios, 3 tercios, 4 cuartos, 5 quintos, etc.; y recíprocamente: 2 medios, 3 tercios, 4 cuartos, 5 quintos valen un únimo.»

Llamaría, pues, FRACCIÓN *una ó varias partes de la unidad dividida en partes iguales*, y de una manera completamente general, podría considerar un número dado como una unidad, y partes iguales de este número como fracciones. (Una de esas partes se llama *parte alícuota*. Ejemplo: Podría dividir el número 12, tomado como unidad, en 1, 2, 3, 4, 6, ó 12 partes iguales, y, según el caso, tendría 2, 3, 4, 6 ó 12 partes alícuotas de 12). El hecho de tomar una ó varias de esas partes me conducirá á constituir una fracción. Por ejemplo: 3 unidades, 1 medio, 3 cuartos, 11 dozavos, etc., y esto me conduciría á comprender que todos los números pueden ponerse en forma de fracciones.

Se ha convenido en llamar *número entero* al que no contiene más que unidades de cierto orden y ninguna unidad de orden inferior, como 1, 2, 3, 5, unidades, etc., serán números enteros. Se ha convenido en llamar *fracción* todo número que no contiene sino partes alícuotas de unidades de un orden considerado, como cuatro quintos, seis novenos serán fracciones. Se ha convenido en llamar *número fraccionario* el que contiene unidades y fracciones de unidades de un orden considerado, como uno y tres cuartos, siete y dos quintos serán números fraccionarios.

Conservación y transformación de los números.

Todo lo que precede y el conjunto de la aritmética nos muestra que los números se conservan y se transforman, lo que no nos sorprenderá, puesto que la aritmética es una ciencia experimental, y la idea de número nos viene de la idea de cuerpo, y todos los conocimientos humanos están presentes para mostrarnos que la substancia (materia-energía), de que están formados los cuerpos, no puede ser creada ni destruída.

El hecho de que una unidad de cierto orden represente una fracción del orden superior y cierto número de unidades del orden inferior, basta para mostrarnos el transformismo de los números.

En la realidad, un número que nos parece desaparecer, se transforma y va á formar parte de agrupaciones de órdenes superiores, inferiores ó iguales.

Ejemplos: tengo una manzana en un cesto; añado otra manzana; la nueva manzana que aparece no es una unidad creada por mí, sino que proviene de otra agrupación de unidades, es decir, de la agrupación de manzanas de un árbol.

Pero podrá decirse, este árbol no contenía en la primavera ninguna manzana, es decir, ninguna unidad del orden de los únimos y ha aparecido cierto número de manzanas, las cuales no han sido creadas; provienen de las reuniones de unidades de órdenes inferiores que se han agrupado en únimos, es decir, en manzanas. Estas unidades de órdenes inferiores representan esas substancias que provienen de la tierra y de la atmósfera, y que, elaboradas por el árbol se han agrupado en un punto dado y por su reunión, han constituído la manzana.

Así también, si tomo la manzana y me la como, esta unidad no habrá desaparecido realmente; se habrá transformado en unidades de órdenes inferiores. En efecto, las diferentes substancias que constituyen la manzana se habrán dispersado en un organismo y habrán ido á formar parte de agrupaciones variadas qne podrán ser consideradas como agrupaciones de unidades de órdenes inferiores al del únimo manzana.

Lo que se llama las matemáticas, y que en realidad no son sino capítulos de la ciencia de los números que todo el mundo debería conocer, confirman y explican lo que precede y son rara vez comprendidas por los metafísicos actuales, que las conocen, pero no se han dado cuenta del transformismo universal, y se imaginan que los números han sido creados de golpe por el cerebro y no corresponden á realidades objetivas.

El transformismo de los números es de tal manera cierto, que se pueden determinar sus leyes, que son las siguientes:

Ningún número se pierde;
Ningún número se crea;
Todos los números se transforman.

Un número que aparece ó desaparece representa, sea la transformación de unidades de órdenes superiores que se dividen para agruparse en unidades de órdenes inferiores; sea la transformación de unidades de órdenes inferiores que se unen para agruparse en unidades de órdenes superiores; sea la dislocación de grupos de unidades del mismo orden que van á agruparse diferentemente.

La ley que precede y que llamaremos *ley de conservación de los números* es completamente general y no sufre ninguna excepción. Toda la experiencia humana la confirma. Una vez bien comprendida, imposibilita las interpretaciones metafísicas de las fórmulas de la aritmética, del álgebra y de las matemáticas llamadas superiores; permite seguir todos los fenómenos de la naturaleza (físicos, químicos, biológicos, etc.) dándose cuenta exacta de ellos. Sin ella es imposible concebir racionalmente la física matemática.

Las seis operaciones elementales de la aritmética.

Concebimos ahora los números como un medio cómodo de dar nombres á los diferentes cuerpos de la misma naturaleza, á fin de permitir la clasificación de esos grupos, de ver si son iguales y en qué difieren. Veremos en la continuación que toda operación de aritmética se reduce á hallar el nombre que ha de darse á un grupo que se forma ó que se modifica.

Si se considera, por ejemplo, la operación llamada *adición,* se vé que su punto de partida consiste en la idea de tomar sucesivamente todas las unidades de una pluralidad ó de varias pluralidades para ponerlas con las unidades de otra pluralidad, y que entonces se hace indispensable hallar el número resultante de la nueva pluralidad procedente de la agrupación de dos ó varias pluralidades distintas. Hallar el número de esta pluralidad nueva es el objeto de la adición. Podemos, pues, definir la *adición, una operación que consiste en hallar rápidamente el número resultante de una pluralidad formada de varias pluralidades reunidas en una sola.* La adición es una operación de reunión, de composición, de *síntesis.*

Se percibe inmediatamente que no se puede añadir una ó varias unidades á un grupo, si esas unidades no han sido tomadas de otro grupo, lo que equivale á decir que la idea de adición implica la idea de sustracción y recíprocamente. En efecto, para explicar la adición hemos debido tener la idea de tomar sucesivamente todas las unidades de una pluralidad para ponerlas en otra parte; pero podemos también tener la idea de no tomar sino cierto número de esas unidades (y no todas) para ponerlas en otro lugar. Será entonces indispensable que modifiquemos el nombre de la pluralidad de la que se han retirado unidades. Hallar ese nombre nuevo que ha de darse á esa pluralidad modificada es el objeto de la *sustracción.* Podemos, pues, definir *la sustracción una operación que consiste en hallar rápidamente el nombre que ha de darse á una pluralidad de la que se ha retirado ciertas unidades para ponerlas en otro lugar.* La sustracción es una operación de desunión, de descomposición, de análisis. Es la inversa de la adición. Además, toda adición implica sustracción, toda sustracción implica adición. Añadir alguna cosa á alguna cosa, significa que se ha tomado alguna cosa de alguna parte. Sustraer alguna cosa á alguna cosa significa que se ha de poner alguna cosa en otro lugar.

Por último, observaremos que la adición y la sustracción son ya operaciones de numeración, puesto que en último resultado no hacen más que modificar agrupaciones y dar nombres á esas agrupaciones modificadas, y en esto consiste la numeración. Podemos, pues, decir, que *la adición y la sustracción son casos particulares de la numeración.*

Sabemos agrupar pluralidades compuestas de un número cualquiera de unidades y hallar rápidamente el nombre que representa la *suma* de las pluralidades reunidas. Hemos encontrado el medio de hacer esto, sin que nos sea necesario contar una por una todas las unidades de las pluralidades reunidas; y así mismo sabemos también quitar cierto grupo de unidades de una pluralidad y hallar el nombre que ha de darse á la pluralidad modificada, que representa la *diferencia* entre las dos pluralidades primitivas. Hemos encontrado el medio de hacer esto, sin haber de descontar una por una todas las unidades quitadas, y vemos así que es posible hallar medios sencillos y rápidos, no sólo de CONTAR, sino de CALCULAR, es decir, de darnos cuenta de diversas combinaciones de agrupaciones de unidades y del partido que puede sacarse de esas combinaciones (la palabra *cálculo* viene del latín CALCULUS = *piedrecita*. Primitivamente los hombres calculaban en ciertos lugares y en ciertas épocas antiguas por medio de piedrecitas). La adición y la sustracción son ya medios poderosos de comparar los grupos entre sí para ver si son iguales ó en qué difieren. Puede haber necesidad de comparar dos grupos entre sí, ó un grupo con varios otros, ó varios grupos con otros grupos, y la comparación rápida sería imposible si no se supieran hacer *sumas* y *diferencias*.

El estudio de las combinaciones de los números (cálculo) conduce naturalmente á hallar simplificaciones de todas clases. Hemos visto que la adición y la sustracción eran casos particulares de la numeración. Otro tanto puede decirse de todas las operaciones de cálculo, y añadiremos que hay casos particulares muy importantes de la adición y de la sustracción que se llaman multiplicación y división.

En efecto, se puede tener la idea de añadir junto cierto número de pluralidades, compuestas todas del mismo número de unidades, y entonces puede buscarse el medio de hallar rápidamente el nombre que ha de darse á la pluralidad que representa el conjunto de pluralidades añadidas; por lo que puede definirse *la multiplicación (caso particular de la adición), una operación que consiste en hallar rápidamente el nombre que ha de darse á una pluralidad formada de varias pluralidades iguales reunidas en una sola*. La multiplicación, como la adición, es una operación de reunión, de composición, de *síntesis*.

Hay que observar que reunir en una sola varias pluralidades iguales, equivale á repetir el número que representa las unidades de una pluralidad tantas veces como haya pluralidades, ó también á repetir el número de las pluralidades tantas veces como haya unidades en una pluralidad. En consecuencia suele definirse «la multiplicación es una operación que consiste en repetir un número llamado *multiplicando* tantas veces como haya unidades en otro número llamado multiplicador.» Convendría añadir «y á encontrar rápidamente el nombre que ha de darse al número llamado *producto* que resulte de esta operación.» Es de notar además que en las diferentes definiciones particulares hay lugar siempre á ver en qué consiste la particularidad. Tal es lo que sucede cuando se trata, por ejemplo, de multiplicar ó dividir fracciones entre sí. Por lo demás, para evitar los errores de interpretación, conviene dar ejemplos. Así, para justificar las definiciones anteriores se pueden dar los ejemplos siguientes: «Dados 8 cestos de manzanas, conteniendo cada uno 22 manzanas, ¿cuántas manzanas habrá en conjunto?» Vemos en esto pluralidades distintas, compuestas todas del mismo número de unidades, y que se trata de reunir para hallar el *total de los totales iguales ó producto*. Otro ejemplo: «Oyese un martillo que da cierto número de golpes y hace una pausa para golpear de nuevo, y de ese modo se han oído 8 series de 22 golpes cada una, ¿cuántos golpes ha dado en conjunto el martillo?» Aquí se trata evidentemente, por *asimilación*, de imaginar pluralidades distintas (series), compuestas todas del mismo número de unidades (golpes) iguales. La asimilación permite aplicar unas mismas definiciones á todas las operaciones que se hacen por los mismos procedimientos ó que son equivalentes.

Hemos visto que adición implica sustracción y recíprocamente, así también multiplicación implica división y recíprocamente, puesto que, como vamos á ver, la división es el caso particular de la sustracción, que corresponde exactamente al caso particular de la adición que es la multiplicación.

Sabemos, en efecto, retirar este número de unidades de una pluralidad para ponerla en otro lugar y hallar rápidamente el nombre que ha de darse á la pluralidad disminuída. Se puede tener la idea, dada una pluralidad, de quitar sucesivamente de ella grupos compuestos todos del mismo número de unidades, y de hallar rápidamente el nombre que ha de darse, sea á los diferentes grupos iguales, sea al número de los grupos. Puede definirse así la división *(caso particular de la sustracción)*, *una operación que consiste en hallar rápidamente, sea el nombre de las diferentes pluralidades iguales que componen cierta pluralidad, sea el nombre del número de esas pluralidades iguales.* La división, como la sustracción, es una operación de desunión, de descomposición, de *análisis.*

Es de observar que separar una pluralidad en varias pluralidades iguales, equivale á buscar, según una definición dada habitualmente, «cuantas veces un número llamado *divisor* está contenido en otro número llamado *dividendo»;* convendría añadir «y á hallar rápidamente el nombre que ha de darse al número llamado *cociente,* que resulta de esta operación.»

Conviene comprender que adición y sustracción, multiplicación y división (y después, como veremos, potencia y raíz) resultan respectivamente de una sola y misma combinación de números considerada desde un punto de vista inverso. Se dirá, por ejemplo, muy justamente, considerando 3 números, «el primero añadido al segundo dado el tercero (adición)», y se dirá, considerando los mismos números, que en consecuencia, el tercero, disminuído del segundo, da el el primero (sustracción). $8 + 2 = 10$ y $10 - 2 = 8$. Asimismo puede concebirse que, dado un producto de dos factores, puede, conociendo el producto y uno de los factores, hallarse el otro (división) $3 \times 2 = 6$ y $6 : 2 = 3$.

A la numeración y á las cuatro reglas (adición, sustracción, multiplicación y división) se limita nuestro volumen de aritmética de los principiantes. El volumen actual le continúa. En este rápido bosquejo el conjunto de la aritmética elemental, indicaremos sólo la continuación de las ideas que se desarrollarán después en el curso de las diferentes partes. Señalemos desde luego que en el curso de la tercera parte se hallará la teoría de las potencias y raíces que completan el conjunto de las seis operaciones elementales de la aritmética.

Partiendo de la adición y de la sustracción, casos particulares de la numeración, hemos sido conducidos á la multiplicación y á la división, casos particulares de la adición y de la sustracción. Las potencias y las raíces son casos particulares de la multiplicación y de la división.

Se entiende por *potencia el producto de un número multiplicado por el mismo cierto número de veces. Hallar rápidamente el nombre que ha de darse á este producto se llama elevar el número á cierta potencia.* En efecto, puede llegar el caso de haber de efectuar multiplicaciones cuyos factores (multiplicando, multiplicador) sean iguales, de manera que una potencia puede ser considerada como el producto de varios factores iguales. La elevación á potencias, casos particulares de la multiplicación, es una operación de reunión, de composición, de *síntesis*.

En sentido inverso, puede llegar el caso, dado un número, de hallar los factores iguales de los cuales es producto. Uno de estos factores iguales se considera entonces como la *raíz* del número. Se ve, que lo mismo que adición implica sustracción y que multiplicación implica división, potencia implica raíz, y se puede definir *la raíz es todo número que, multiplicado cierto número de veces por sí mismo, produce otro número llamado potencia.* La extracción de raíz de un número, que podría llamarse *radicación, es una especie de división (ó de serie de divisiones) en las que el (ó los) divisor ó divisores y el cociente han de ser iguales y han de hallarse por un procedimiento rápido.* Ejemplos: 3^2 ó $3 \times 3 = 9$ y $\sqrt{9}$ ó $9 : 3 = 3$; 2^3 ó $2 \times 2 \times 2 = 8$ y $\sqrt[3]{8}$ ú $8 : 2 : 2 = 2$. La extracción de raíces, caso particular de la división, es una operación de desunión, de descomposición, de *análisis.*

Observemos, por último, que la elevación á potencias y la extracción de raíces son casos particulares de la numeración, puesto que se trata, en un caso, de hallar rápidamente el nombre que ha de darse á un conjunto de grupos iguales formados de grupos iguales, y, en otro caso, de hallar rápidamente el nombre que ha de darse á uno de los grupos iguales que forman parte de ese conjunto de grupos iguales formados de grupos iguales.

Las seis operaciones elementales de la aritmética, cuyos cuadros damos más abajo, dan ya una idea de la fecundidad inmensa de las combinaciones de números y del partido que de ellas puede sacarse.

CUADRO RECAPITULATIVO

NUMERACIÓN

Caso particular del lenguaje hablado y escrito, que consiste en hallar rápidamente un número y un signo para cada grupo de unidades; los grupos compuestos del mismo número de unidades han de tener los mismos nombres y signos; los grupos compuestos de un número diferente de unidades han de tener nombres y signos diferentes.

SÍNTESIS *(reunión)*	ANÁLISIS *(desunión)*
Adición, caso particular de numeración, que consiste en hallar rápidamente el nombre que ha de darse á una reunión de unidades ó de pluralidades; implica la sustracción;	**Sustracción,** caso particular de numeración, que consiste en hallar rápidamente el nombre que ha de darse á una pluralidad modificada por la desunión de cierto número de unidades; implica la adición;
Multiplicación, caso particular de adición, que consiste en hallar rápidamente el nombre que ha de darse á un grupo de grupos iguales; implica la división;	**División,** caso particular de sustracción, que consiste en hallar rápidamente el nombre que ha de darse, sea al número de grupos iguales que componen un grupo total; sea al número de las unidades de cada uno de los grupos iguales que componen el grupo total;
Elevación á potencias, caso particular de multiplicación, que consiste en hallar rápidamente el nombre que ha de darse á un conjunto de grupos iguales formados de grupos iguales; implica la radicación.	**Radicación,** caso particular de división, que consiste en hallar rápidamente el nombre que ha de darse á uno de los grupos iguales que forman parte de un conjunto de grupos iguales formados de grupos iguales.

Divisibilidad

Si se divide un grupo de unidades en cierto número de grupos iguales, ó bien la operación puede hacerse exactamente, ó nos hallamos en presencia de un resto compuesto de unidades insuficientemente numerosas para formar un grupo igual á los otros. En el primer caso se dice que el número dividendo es divisible exactamente (ó por abreviación *divisible*) por el número divisor; en el segundo caso se dice que el número dividendo *no es divisible* (sobreentendido exactamente) por el número divisor. Basta una mirada sobre las tablas de división (véase volumen de los principiantes pág. 140) para darse cuenta de que la mayor parte de las divisiones dan restos.

Como la división implica multiplicación, decir que un número es divisible por otro es decir que es *múltiplo* de ese otro. Ejemplo: 27 es divisible por 3 puesto que $27 : 3 = 9$, resta 0; y 27 es múltiplo de 3, puesto que $9 \times 3 = 27$.

El estudio de la multiplicación y de la división conduce, pues, naturalmente al estudio de los casos en que las divisiones dan ó no dan resto. Es, en efecto interesante, poder reconocer por un medio rápido si tal número es divisible por tal otro.

Se ve inmediatamente que los caracteres de divisibilidad comunes á todos los números consisten en que son todos divisibles por ellos mismos y por la unidad. Cuando un número no tiene otro divisor que él mismo y la unidad se le llama *número primo*. Cuando dos ó varios números no tienen otro divisor común que la unidad, se les llama *números primos entre sí*. Y por el estudio de la multiplicación y de la división hemos llegado lógicamente á reconocer que, desde el punto de vista de la *divisibilidad*, cada número tiene propiedades especiales con relación á los otros, y á clasificar metódicamente esas propiedades, todas las cuales tienen su aplicación práctica. Una de las más conocidas es la utilización de la divisibilidad por 9 para hacer rápidamente la prueba de las multiplicaciones y de las divisiones. Toda teoría justa corresponde á una práctica útil que suele percibirse inmediatamente. Puede también no percibirse hasta después una utilización; así, por ejemplo, los servicios que puede prestar la teoría de la *descomposición de un número en sus factores (ó divisores) primos,* la del *mayor común divisor,* la del *mínimo común múltiplo,* etc., que se utiliza, por ejemplo, para simplificar fracciones.

Fracciones

Ya hemos definido (pág. 23) las *fracciones «una ó varias partes de la unidad dividida en partes iguales»*. Veremos que sirven para medir las dimensiones menores que la unidad.

Puede concebirse una unidad como pudiendo ser dividida en un número cualquiera de partes iguales; nos hallamos entonces en presencia de las llamadas *fracciones ordinarias.* Se ha convenido en llamar *denominador,* el número que indica en cuántas partes está dividida la unidad, y *numerador* el que indica el número de partes. Por ejemplo, en la fracción tres cuartos, que se escribe $\frac{3}{4}$, 4 es denominador y 3 numerador. Si se concibe la unidad dividida en partes divisibles por 10 (por ejemplo, en 10, 100, 1000, etcétera, partes iguales) nos hallamos en presencia de fracciones llamadas *decimales.*

Hemos hecho notar (volumen de los principiantes pág. 79) que no basta, después de haber hecho una división, indicar sencillamente el resto, diciendo, por ejemplo, 164 : 8 = 20 y resta 4; sino que ha de decirse $\frac{4}{8}$, porque en este caso quedan 4 cosas para repartir entre 8.

Es interesante estudiar los grupos de fracciones, como se han estudiado los grupos de números llamados enteros y que en realidad no son sino unidades de orden superior. Este estudio conduce á hallar las reglas por las cuales se puede hacer rápidamente sobre las fracciones (grupos de orden inferior), las mismas operaciones que se hacen sobre los números enteros.

Se concibe, pues, la *numeración de las fracciones* y la posibilidad de comparar unos grupos entre sí y con números enteros (grupos de unidades) para percibir sus semejanzas ó sus diferencias. Al efecto, es importante que se puedan poner los diferentes grupos bajo la forma más sencilla ó la más cómoda y se llega á la *simplificación de las fracciones, á la reducción de las fracciones al mismo denominador,* á la *reducción de las fracciones al mínimo denominador común.*

Puede observarse de un modo general, que una fracción ordinaria puede ser considerada como el enunciado de una división que haya de operarse, y se comprenderán todavía mejor las fracciones cuando se hayan estudiado relaciones.

Cuanto más avanzamos en la aritmética, mejor vemos cuánto varían las propiedades de un grupo de unidades, según la cantidad y el orden de dimensión de las unidades. Lo mismo sucede respecto de la inmensa variedad de substancia de la naturaleza. Cualquiera que sea el aspecto bajo el cual se les considere (substancia cósmica, minerales, vegetales, animales), sus propiedades varían según la cantidad y la naturaleza de las unidades que les componen.

La noción de relación y sus consecuencias en aritmética

Poseemos ya medios seguros de comparar entre sí los diferentes grupos de unidades del mismo orden y de órdenes diferentes. Estos medios se refieren todos en definitiva á la noción de relación de la que es preciso estudiar en detalle las consecuencias. Esta noción que resulta, en efecto, de la comparación de grupos, permite establecer las diferencias, seguir las modificaciones de los grupos que dependen unos de otros y hallar así la solución fácil de un número grandísimo de problemas, lo mismo que simplificaciones importantes en los cálculos.

De una manera general, una relación es el resultado de una comparación. Como la aritmética se ocupa de los números, una relación entre dos números es el resultado de su comparación. El resultado más sencillo de la comparación de dos números es la juxtaposición. Permitiendo esta juxtaposición ver inmediatamente cuales son el mayor y el menor, es natural preguntarse en cuánto el uno excede al otro, y, bajo esta forma (21-3) esta relación se llama *relación por diferencia ó relación aritmética.*

Se puede tener también la idea de comparar los dos números separando el segundo del primero, no sólo una vez, sino tantas veces como sea posible; y bajo esta forma $\left(\frac{21}{3}\right)$ la relación se llama *relación por cociente ó relación geometrica, ó simplemente relación.*

Así comprendida, la relación de dos números es el número que expresa cuántas veces el primero contiene al segundo, y veremos después que puede llamarse de una manera general, relación entre dos dimensiones de la misma especie la medida de la primera, tomada la segunda como unidad.

Puede tenerse la idea de comparar estas relaciones entre sí. De este modo hemos tenido primeramente la noción de los *cuerpos*, hemos comparado entre sí y hemos tenido la noción de *cuerpos idénticos* y de *cuerpos iguales;* hemos comparado, en un grupo de cuerpos idénticos ó iguales, el conjunto del grupo (pluralidad) á uno de los cuerpos (unidades) y hemos tenido la noción del *número,* que puede ser ya considerado como una *relación* (resultado de la comparación entre la pluralidad y la unidad); comparando ahora relaciones entre sí, llegamos á la noción de relaciones iguales y llamamos *proporción* á la reunión de dos relaciones iguales.

Del mismo modo que hemos estudiado las propiedades de los números, así también pueden estudiarse las propiedades de las relaciones y de las proporciones, y se puede tener idea de comparar unas proporciones entre sí. Se llama *progresión* una continuidad de relaciones iguales y pueden estudiarse las propiedades de las progresiones.

Se ve que, puesto que unas relaciones pueden ser *por diferencia* ó *por cociente,* las proporciones (que están formadas de relaciones) y las progresiones (que están formadas de proporciones), pueden ser también por diferencia ó por cociente y se puede tener la idea de comparar á progresiones por diferencia á progresiones por cociente. Se llaman *logaritmos* unos números en proporción aritmética que responden término á término á unos números en proporción geométrica, y se pueden estudiar las propiedades de los logaritmos.

El estudio de estas propiedades ha conducido á la construcción de *tablas de logaritmos,* que no son sino tablas de progresiones, en que unos números, en proporción aritmética, responden término á término, á unos números en proporción geométrica. Estas tablas permiten simplificar considerablemente los cálculos, reemplazando multiplicaciones y divisiones por adiciones y sustracciones; elevaciones á potencias y radicaciones por multiplicaciones y divisiones.

Todos esos conocimientos han sido adquiridos poco á poco por las generaciones que se han sucedido á cada momento; conviene que los hombres puedan medir el camino recorrido por la ciencia, que se aumenta siempre con nuevos conocimientos.

Las aplicaciones prácticas de todas las reglas que resultan de la teoría (y ella á su vez resulta de la experiencia), son en extremo numerosas. Desgraciadamente, en la sociedad actual son utilizadas en su mayor parte por la concurrencia para la lucha entre los humanos, en lugar de serlo para la ayuda mutua, para el compañerismo. Siendo nuestra época un período de transición, hemos creído que debíamos indicar los usos actuales, distinguiendo los buenos de los malos; y señalar los usos que deberán adoptar los individuos razonables, deseosos de que cesen las luchas mortíferas para entregarse á la alegría de la fraternidad. No extrañará, pues, hallar aún en este volumen párrafos destinados á desaparecer de las aritméticas del porvenir.

Conviene, sin embargo, observar que el conocimiento de una regla de cálculo es siempre útil. Así como se puede con un buen cuchillo cortarse cruelmente ó mondar una fruta sabrosa, así también las diversas reglas, mal aplicadas actualmente, pueden aplicarse con discernimiento á otros usos.

En la sociedad actual, los hombres suelen hacer casi exclusivamente un uso comercial de *las reglas de tres*, de las *particiones proporcionales*, etc. Las *reglas de sociedad*, *de interés*, *de descuento*, *de medias*, *de aligación*, y muchas otras sirven en nuestra época para la explotación humana. Conviene darse cuenta de ello y concebir la utilización razonable de la aritmética.

No hemos dejado de señalar de paso el valor de las fórmulas de generalización y su utilidad.

Generalización de la aritmética, el álgebra

Sabemos dar nombres á los grupos de cuerpos, seguir esos cuerpos en sus diferentes transformaciones y dar nombres á los grupos transformados por la acción de poner ó quitar unidades ó porciones de unidades, ó por la agrupación de unidades que forman parte de grupos en grupos de unidades de órdenes diferentes. Habiendo escogido un sistema cómodo de numeración, hemos hallado medios fáciles de aplicarle en las diferentes circunstancias, de simplificar las operaciones, de ganar tiempo y de disminuir nuestro esfuerzo. Sabemos resolver problemas y hemos tenido la idea de hallar fórmulas que nos permiten, dado cierto problema, notar, por medio de signos, las diversas operaciones necesarias para resolver todos los problemas del mismo género. Esta idea es el punto de partida del *álgebra*. El álgebra (del árabe AL-DJABER = *ciencia de las restituciones)* no es más que la aritmética generalizada. Esta generalización es tal, que permite calcular no sólo los números de un sistema de numeración, sino también los números expresados de cualquier manera.

En el álgebra los números se representan por letras tomadas arbitrariamente. Las letras se acompañan de símbolos que indican el género de agrupaciones que representan (agrupación que ha de añadirse una vez ó varias, agrupación que se ha de disminuir una vez ó varias, etc.) Estas letras y estos símbolos permiten identificar suficientemente los grupos y seguirlos en las diferentes manifestaciones de agrupación. Los símbolos se modifican, según las circunstancias, conforme á reglas lógicas, hasta la agrupación final de letras y de símbolos que constituyen una fórmula general aplicable á tódo un conjunto de problemas.

En álgebra se consideran grupos que deben ser iguales y que comprenden *incógnitas*. Se trata de determinar las diferentes operaciones que han de efectuarse para hallar el valor de las incógnitas en las *ecuaciones* (expresiones de la igualdad existente entre varias cantidades equivalentes).

Noción de medida, utilización de la aritmética, ciencia de los números continuos para medir los grandores discontinuos

Sabemos que el resultado de la comparación entre una pluralidad y un objeto que forma parte de esta pluralidad es un *número* de objetos, y que un número puede siempre servir para formar otro número (por ejemplo, añadiendo una unidad). Un número cualquiera está, pues, siempre compuesto de unidades distintas y separadas las unas de las otras. Este carácter se llama *discontinuidad*.

Al contrario de los números, vemos que los grandores pueden aumentar ó disminuir por intervalos tan pequeños como se quiera. Ese carácter se llama *continuidad*.

Ejemplo: Un grupo de vasos llenos de agua, forman un número discontinuo de vasos de agua; el agua de esos vasos echada en un tonel, es cierto grandor de agua. Se puede *contar* el número de vasos de agua, no puede contarse el grandor del agua del tonel, pero se le puede *medir*, contando el número de vasos de agua, es decir, comparando la porción de espacio ocupado por el agua del tonel con cierta porción de espacio, escogida como tipo, y que es la capacidad de un vaso.

Medir un grandor es compararle con un grandor de la misma naturaleza tomada como tipo (unidad). Se ve que una medida puede referirse así á la comparación de una unidad con una pluralidad, y que, en consecuencia, el resultado de una medida puede expresarse siempre por un número. Una medida es una relación, entre grandor y una unidad de grandor. La relación de dos grandores de la misma especie es la medida de la primera, siendo tomada la segunda como unidad.

De esa manera la medida de los grandores se halla referida á sencillas operaciones de cálculo de la incumbencia de la aritmética, y la descripción de las unidades escogidas, como las operaciones á que dan lugar, pueden figurar como un capítulo de la ciencia de los números.

La elección de las unidades tiene grandísima importancia, y cuando los hombres sean razonables tendrán seguramente un sistema uniforme de medidas que será lo más cómodo. Se han podido determinar ya algunas *unidades fundamentales* de las que derivan todas las otras, y que son las *unidades C G S* (centímetro, gramo, segundo), que se refieren á las ideas de longitud, peso y duración, correspondientes á las ideas de espacio, masa y tiempo.

A estas unidades fundamentales se refieren gran cantidad de unidades particulares, justificadas por usos racionales ó irracionales. Así es como se han escogido unidades de longitud, de superficie, de volumen, de capacidad, de peso, de moneda, de tiempo, etc.

En los libros escolares del período actual, período transitorio, hacer que se comprenda bien cuáles son, entre los movimientos efectuados por los hombres, los movimientos defectuosos y cuáles son los movimientos que deberían efectuar si fueran razonables. Los movimientos defectuosos realizados por los hombres actuales, dan lugar á capítulos que serán tachados en los libros de lo por venir. Tal es el capítulo de las unidades de moneda, concebidos por individuos que tienen la concepción errónea, desoladora é ilógica de *concurrencia* entre los humanos y que desecharán unos individuos que tengan la concepción justa, consoladora y lógica de *compañerismo* entre los humanos. Unos individuos razonables deberán entenderse para trabajar en común en la circulación de la substancia y en su selección en provecho de la especie humana. La ciencia hará este acuerdo posible, inevitable y próximo.

Resumen. Base y objeto de la aritmética

En resumen, la base de la aritmética, como de todas las otras ciencias, es la *experiencia,* puesto que no se puede conocer sin los sentidos.

La aritmética, como todas las otras ciencias, se ocupa de abstracción.

La abstracción, estudiada en aritmética, es el *número,* que puede considerarse como la propiedad que tienen todos los cuerpos de reunirse en grupos más ó menos importantes.

Pueden explicarse por razones físicas las diferentes nociones que sirven de base á la aritmética *(cuerpo, identidad, igualdad, pluralidad y unidad, relación, número,* etc.)

Y se concibe la NUMERACIÓN como *la operación aritmética por excelencia.* Las otras operaciones son *casos particulares de numeración.*

Estas operaciones pueden clasificarse en operaciones de *síntesis* y de *análisis.*

Estas diferentes nociones, las de *fracción, de unidades de órdenes diferentes,* que se transforman las unas en las otras, el hecho de que es imposible concebir una operación de síntesis que no provenga de un análisis, sin una operación de análisis que no provenga de una síntesis, el hecho de que los cuerpos están compuestos de cuerpos que se desunen para agruparse de modo diferente, evidencian que el transformismo universal y la ley de conservación se aplican á los números, lo que se puede resumir diciendo: *Ningún número se pierde, ningún uúmero se crea, todos los números se transforman.*

Esas transformaciones, que son extremadamente variadas, se estudian en aritmética. Las leyes de esas transformaciones dan lugar á aplicaciones interesantes; tal es la ciencia del cálculo. Se llega á examinar el *sistema de numeración en uso,* las seis operaciones elementales *(adición, sustracción, multiplicación, división, elevación á potencia, radicación), la divisibilidad, los números primos, los números primos entre sí, las fracciones, las relaciones, las proporciones, progresiones y logaritmos* y, de una manera general, la *proporcionalidad* con todas sus consecuencias, que conducen á reglas prácticas seguras, lo mismo para la organización detestable de la concurrencia que para la organización deseable del compañerismo.

Se llega, por último, á concebir la generalización de la aritmética, el *álgebra*, que forma el objeto de un estudio especial.

Y á cada nueva teoría descubierta, corresponde una aplicación práctica, tan cierto es que en aritmética, como en todas las ciencias, la experiencia es la base, la *utilidad*, el objeto.

La utilización más interesante de la aritmética es el empleo de los números discontinuos para la *medida de los grandores continuos*. El principio de toda medida, comparar la cosa que ha de medirse con una cosa de la misma naturaleza tomada como tipo (unidad), conduce á la idea de escoger tantas unidades como categorías medibles haya y enumerar las *unidades en uso* entre los hombres.

Conviene no perder de vista, en el curso de los diferentes capítulos de la aritmética, el encadenamiento lógico de las ideas, que conduce de nociones sencillísimas á la comprensión de las operaciones más complejas. La misma observación puede hacerse respecto de todas las ciencias.

Obsérvemos, por último, que no hay ciencia posible sin el auxilio de la aritmética.

Para terminar, repetiremos aquí lo que dijimos en el *volumen de los principiantes:* «La aritmética da á los que la practican la costumbre de raciocinar vigorosamente y de percibir la eficacia de razonamientos vigorosos. El método matemático, que da satisfacción á los que le emplean correctamente, debe emplearse en todas las circunstancias de la vida, abandonando los métodos extravagantes y malos que dan á los hombres tan detestables resultados como pueden verse por la defectuosa organización de las sociedades actuales. Todo el conjunto de una enseñanza debe concurrir á la formación de cerebros capaces de raciocinar correctamente y á adquirir conocimientos físicos dirigidos al establecimiento de una sociedad razonable, en que todos puedan satisfacer sus necesidades con el mínimum de esfuerzo. Es locura imaginar que problema semejante puede resolverse de otro modo que con el concurso de la aritmética y de las otras ciencias.»

Lo que resumimos diciendo: No esperen los ignorantes resolver por la arbitrariedad los problemas sociales. Sólo la ciencia (conocimiento) permite determinar las leyes físicas y hallar la solución de los diferentes problemas. Como los otros, resolverá fácilmente el de nuestra felicidad; pero á ella y no á la arbitrariedad hay que dirigirse.

SEGUNDA PARTE

Unidades Fundamentales

Sistema Metrico

Hemos colocado al final de esta segunda parte tipos de ejercicios y de problemas. Los profesores acostumbrarán á los alumnos á plantear problemas por sí mismos, refiriéndose á las diferentes circunstancias de una existencia razonable.

SEGUNDA PARTE

Unidades fundamentales
Sistema Métrico

Medida

Sabemos que: *

—El resultado de la comparación de una *pluralidad* con una de las *unidades* de que aquellas se compone, se llama el *número* de los objetos;

—Los números son *discontinuos;*

—Llamamos, por el contrario, *grandor* á lo que es *continuo;* **

Efectuar una *medida* es comparar una cosa con otra de la misma naturaleza tomada como *tipo* ó *módulo;*

—Considerado este tipo como *unidad,* se ve inmediatamente que el cálculo puede utilizarse para la medida de los grandores, porque la comparación permitirá considerar los grandores como compuestos de porciones discontinuas iguales á las *unidades escogidas,* porciones que podrán contarse. (Ejemplo: Si se ha de medir la longitud de una cuerda continua, se le puede comparar á la longitud de un trozo de cuerda, por ejemplo, tomado como tipo y que se llama 1. Si este trozo de cuerda-tipo (módulo) puede

---

* Véase la primera parte.

** Pónganse ejemplos: longitudes, líquidos, etc.; nociones de tiempo, de espacio, etc. (Véase *La Substancia Universal* y los *Elementos de Geometría.)*

ser aplicado 3 veces sobre la cuerda que ha de medirse, se dirá que la longitud de la cuerda es igual á 3 unidades de longitud.)

De ese modo la medida de los grandores se reduce á simples operaciones de cálculo correspondientes á *la aritmética,* y la descripción de las unidades escogidas y de las operaciones á que dan lugar puede figurar como un capítulo de la aritmética.

Elección de las unidades

Habiendo de medir la longitud de una cuerda, si escojo un trozo de cuerda-tipo (módulo) que pueda ser aplicado 3 veces sobre la cuerda medida, diré que la medida de la cuerda es 3 unidades de longitud. Habiendo de medir otra cuerda, podré servirme del mismo módulo y hallar que la medida de esta otra cuerda es 6 unidades de longitud.

Pero hubiera podido muy bien escoger un módulo (unidad de medida) más pequeño y hallar que la medida de la primera cuerda es, por ejemplo, 4 y la de la segunda 8.

Hubiera podido también escoger un módulo para la medida de la primera cuerda y otro módulo para la medida de la segunda.

Se ve con facilidad cuán difícil sería comparar medidas entre sí, si se cambiase constantemente de unidades, y cuántas dificultades tendrían los hombres para entenderse en sus relaciones diarias, si cada vez que hubieran de efectuar una medida tuvieran que explicar la naturaleza de la unidad escogida y calcular la relación de esta unidad con unidades escogidas antes ó después por sí mismo ó por otras personas.

Hay, pues, una gran ventaja en escoger los módulos (unidades de medida) una vez por todas, tales que se les pueda reconstituir fácilmente en un momento dado, y que el mayor número posible de hombres adopten los mismos módulos.

Cuando todos los hombres sean razonables, tendrán seguramente un sistema uniforme de medidas, que no podrá ser sino el que resulte más cómodo.

¿Cuántas unidades de medida han de escogerse?

Sabemos que medir significa comparar una cosa á una cosa de la misma naturaleza tomada como unidad.

Habrán, pues, de escogerse tantas unidades como categoría de cosas hayan de medirse.

Unidades fundamentales

Veremos en la práctica que se han podido determinar algunas unidades fundamentales de las cuales derivan todas las demás, y que esas unidades son las unidades C G S (centímetro, gramo, segundo) que corresponden á las ideas de *espacio* (camino recorrido), de *peso* (masa) y de *tiempo* (duración). *

Medida del espacio

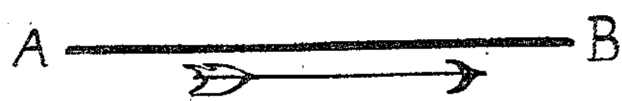
Veremos en geometría, que el espacio puede ser concebido por nosotros, *desde el punto de vista experimental*, como el conjunto de todos los sitios que pueden ocupar los cuerpos. Por consecuencia no

* Véanse en *La Substancia Universal* los párrafos concernientes á las nociones de espacio, de masa y de tiempo, lo mismo que los que se refieren á la medida del espacio, de la masa y del peso y la del tiempo.

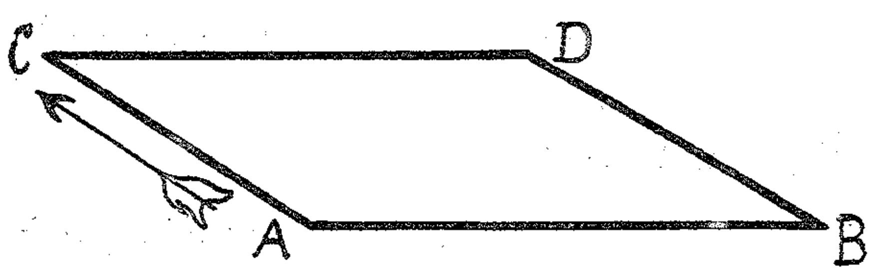
puede medirse un espacio sino midiendo el cuerpo ó la porción de cuerpo que ocupa ó puede ocupar este espacio.

Veremos también en geometría que el espacio ocupado por un cuerpo puede ser concebido como resultante de tres movimientos:

1.° Un movimiento de extensión, trazando un límite á partir de un punto A, en cierta dirección *(longitud)* hasta otro punto B.



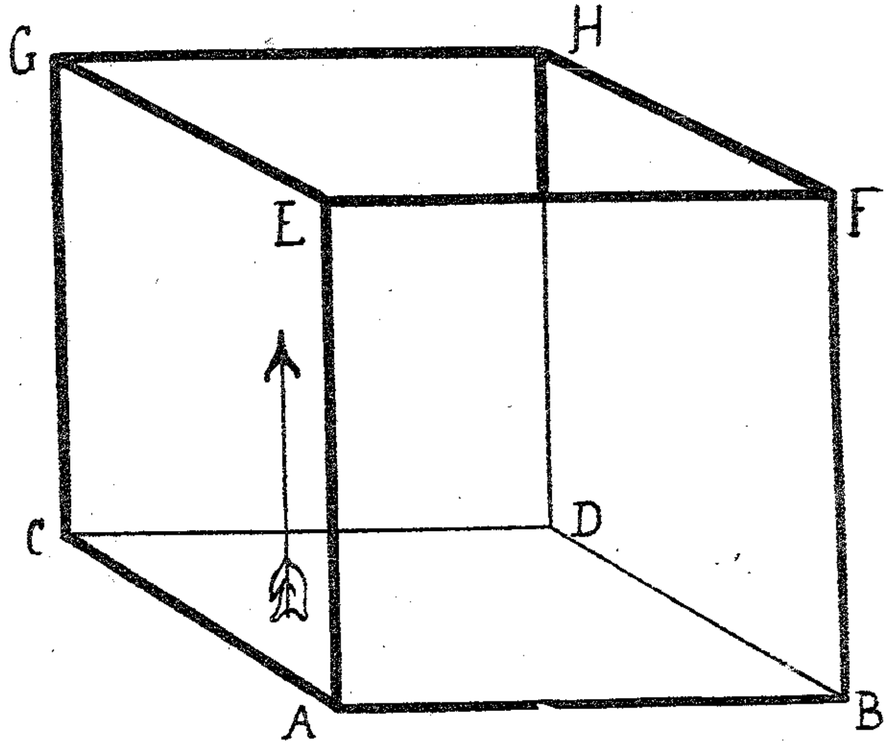
2.° Un movimiento de extensión de todos los puntos de esta longitud A B en otra dirección A C *(anchura)* y hasta que A B llega á C D.



Se llama el espacio A B D C, cubierto por esta extensión, una *superficie*.

3.° Un movimiento de extensión de todos los puntos de esta superficie en otra dirección A E *(altura)* y hasta que A B C D llega á E F G H.

Se llama el espacio A B C D E F G H, cubierto por esta extensión, un *volumen*.



Observación: Todos los cuerpos, cualquiera que sea su forma, pueden concebirse como resultantes de esos tres movimientos, siempre que se suponga que la longitud puede aumentar ó disminuir durante la extensión en anchura, y que la superficie puede aumentar ó disminuir, en todas direcciones ó sobre ciertos puntos, durante la extensión en altura.

Ya veremos en geometría é indicaremos en los ejercicios siguientes cómo se miden las principales superficies y los principales volúmenes. Por el momento vemos muy bien que se puede calcular la longitud de una anchura y la longitud de una altura, y que, por consiguiente, la unidad de longitud puede tomarse como punto de partida para la medida de las longitudes, de las superficies y de los volúmenes.

Unidad de longitud.—El Metro

La unidad escogida para medir las longitudes es la longitud llamada metro; es decir, la longitud á 0 grado centígrado de un módulo de platino é iridium (90 partes de platino y 10 partes de iridio) cuyo módulo (patrón) se conserva en el Conservatorio de las Artes y Oficios en París *.

Se decidió en 1790 que la unidad fundamental de longitud llevaría el nombre de metro (del griego METRON = *medida)* y que esta longitud sería la diezmillonésima parte de la distancia del ecuador al polo. Esta distancia fué calculada de 1792 á 1799. Posteriormente se han practicado verificaciones, de las cuales resulta que la distancia del ecuador al polo (un cuarto del meridiano terrestre) debe de ser evaluada en 10.000.856 metros. No obstante, la unidad de longitud escogida primitivamente ha quedado adoptada.

Conviene, pues, definir el *metro* como lo hemos hecho, á saber: *el metro es la longitud á* 0 *grado centígrado de un módulo de platino y de iridio conser-*

---

* Conviene exponer la historia del metro, y á este efecto, desarrollar los puntos siguientes:

—Graves inconvenientes de los antiguos sistemas de unidades de medida que no eran uniformes y que eran complicados (bajo múltiples variaciones complicaban los cálculos).

—Trabajos anteriores á 1790 y trabajos ejecutados en 1790, á consecuencia de los cuales se decidió que la unidad fundamental de longitud fuera la diezmillonésima parte de la distancia del ecuador al polo.

—Trabajos de medida destinados á calcular esta distancia. Medidas de arcos del meridiano y, en particular, medida del arco del meridiano entre Dunkerque y Montjuich (Barcelona). Establecimiento de los patrones del metro y del kilogramo (1792-1799).

—Verificaciones posteriores. Trabajos internacionales. El sistema métrico adoptándose cada vez más. Aun queda que hacer.

—El sistema métrico es una revolución científica, y demuestra de lo que son capaces los hombres cuando apelan á la lógica.

vado en París, longitud que representa cerca de la diezmillonésima parte del cuarto del meridiano terrestre.

Múltiplos y submúltiplos del metro

Se ha formado un sistema de palabras para designar unidades de diez en diez veces mayores y de diez en diez veces menores que el metro.

SE VE QUE EL SISTEMA MÉTRICO, COMO EL SISTEMA DE NUMERACIÓN, ES DECIMAL.

Los *múltiplos del metro,* es decir, las unidades de medida de 10 en 10 veces mayores que el metro, son:

El *decámetro*(Dm) $= 10^m$ (del griego DECA = *diez).*

El *hectómetro*(Hm) $= 100^m$ (del griego HECATON = *ciento).*

El *kilómetro* (Km) $= 1000^m$ (del griego KHILIOS = *mil).*

El *miriámetro* (Mm) $= 10000^m$ (del griego MURIUS = *diez mil).*

Los *submúltiplos del metro,* es decir, las unidades de medida de 10 en 10 veces menores que el metro son:

El *decímetro* (dm) $= \frac{1}{10}$ de metro $= 0,^m 1$ (del latín DECIMUS = *décimo).*

El *centímetro* (cm) $= \frac{1}{100}$ de metro $= 0,^m 01$ (del latín CENTUM = *ciento).*

El *milímetro* (mm) $= \frac{1}{1000}$ de metro $= 0,^m 001$ (del latín MILLE = *mil).*

El *micron* (μ) $= \frac{1}{1000}$ de milímetro $= 0,^m 000001$ (del griego MICRON = *pequeño).*

En la práctica se utiliza el metro como unidad para medir las longitudes que podemos hacer que pasen entre nuestros brazos ó sobre las cuales podemos fácilmente extender los brazos *. Ejemplos: una cinta, una tela, una tabla, una barra de hierro, etc.

Los *metros* usados comunmente tienen formas diversas**: regla cuadrada, regla plana, regla plegada, cinta. Se construyen de substancias minerales, vegetales y animales (metal, madera, marfil, etc.). Se gradúan en centímetros y milímetros.

El *decámetro*, el *hectómetro*, el *kilómetro* y el *miriámetro* se utilizan como unidades en la agrimensura (caminos, terrenos) en lo que concierne á ciertas longitudes que exceden de la extensión de nuestros brazos y que han de medirse sobre el suelo.

El decámetro usado comunmente (cadena de agrimensor) es una cadena formada por eslabones y terminada en sus extremidades por agarraderos y consta de 50 porciones de dos decímetros cada una. Hay también el decámetro y el doble decámetro de cinta para medir edificaciones.

Andando á un paso ordinario se adelanta algo más de un kilómetro en un cuarto de hora, ó sea más de una legua por hora. (Una legua = 4 kilómetros).

El *decímetro*, el *centímetro* y el *milímetro* se utilizan para medir longitudes que pueden pasar entre nuestras manos cuando es inútil extender los brazos. Ejemplos: trabajos de dibujo, medida de objetos pequeños.

---

* Explíquese á los alumnos que el hombre se inclina naturalmente á escoger unidades de comparación adecuadas á su estatura y á la de los cuerpos que ha de medir. Si los objetos que han de medirse son muy grandes ó muy pequeños se trata de ponerse á su alcance ó de ponerlos al suyo. Esta es la razón de ser de los múltiplos y submúltiplos.

** Muéstrense los objetos á los alumnos.

En la práctica se usa mucho el *doble-decímetro* (regla de 20 centímetros, graduada en centímetros y milímetros). El doble decímetro es algo mayor que la longitud de una mano por término medio. Una mano medio adulta tiene unos 18 centímetros.

El *milímetro* se utiliza para medir, por ejemplo, los gruesos. Ejemplos: espesor de un tubo de plomo, de una hoja de cristal, de una tabla, etc. No hay, naturalmente, regla de un centímetro ni de un milímetro, que serían demasiado pequeñas para ser manejadas. Se usan reglas mayores en las cuales se hallan marcadas las subdivisiones en centímetros y en milímetros.

El *micron* (milésima de milímetro) se emplea en las medidas microscópicas, es decir, cuando se trata, por ejemplo, de evaluar objetos muy pequeños cuyos detalles escaparían á la vista sin la ayuda de instrumentos llamados *microscopios* (del griego MICROS = *pequeño,* y SCOPEIN = *examinar)* por cuyo medio se pueden ver esos objetos muy aumentados. Ejemplo: evaluación de la longitud de una célula.

Unidad de superficie. — El Metro cuadrado

La unidad escogida para medir las superficies es el *metro cuadrado* (m^2), ó sea un cuadrado construído por medio del metro, un cuadrado que tiene un metro de largo y un metro de ancho.

Múltiplos y submúltiplos del metro cuadrado

Los múltiplos y submúltiplos del metro cuadrado, es decir, las unidades de medida de 100 en 100 veces mayores ó menores que el metro cuadrado son:

El *área* ó *decámetro cuadrado* (Dm^2) = cuadrado de 10 metros de lado que contiene (véase el párrafo siguiente) 100 m^2.

La *hectárea* ó *hectómetro cuadrado* (Hm^2) = cuadrado de 100 metros de lado que contiene (véase el párrafo siguiente) 100 Dm^2.

El *kilómetro cuadrado* (Km^2) = cuadrado de 1000 m de lado que contiene (véase el párrafo siguiente) 100 Hm^2.

El *miriámetro cuadrado* (Mm^2) = cuadrado de 10000 m de lado que contiene (véase el párrafo siguiente) 100 Km^2.

El *decímetro cuadrado* (dm^2) = cuadrado de 0 m, 1 decímetro de lado = 0 m^2, 01 (véase más abajo).

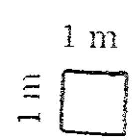
El *centímetro cuadrado* (cm^2) = cuadrado de 0 m, 01 centímetro de lado = 0 m^2, 0001 (véase más abajo).

El *milímetro cuadrado* (mm^2) cuadrado 0 m, 001 milímetro de lado = 0, m^2 000001 (véase más abajo).

La numeración de las superficies es centesimal

Hemos visto que la numeración de las longitudes es decimal, es decir, que las diferentes unidades consecutivas de longitud son de 10 en 10 veces mayores ó menores. Vamos á demostrar que la numeración de las superficies es centesimal, es decir, que las diferentes unidades consecutivas de superficie son de 100 en 100 mayores ó menores.

Vamos á demostrar, por ejemplo, que el decámetro cuadrado (Dm^2) es cien veces mayor que el metro cuadrado (m^2), ó, en otros términos, que el Dm^2 contiene 100 m^2.



En efecto, sea un m^2, ó un cuadrado que tiene 1 m de lado;

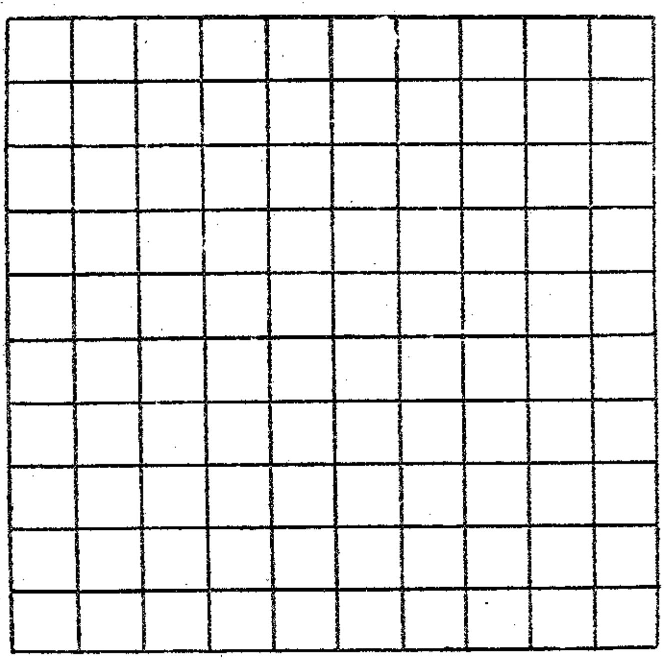
Si trazo 10 superficies iguales á ese m^2 al lado las unas de las otras sobre la misma línea, tendré un conjunto que representará una superficie de 10 m de largo y de 1 m de ancho.

1 m

10 m

Si en el sentido de la anchura, coloco 10 de esas superficies al lado las unas de las otras, tendré un conjunto que representará una superficie de 10 m de largo y de 10 m de ancho, ó sea un decámetro cuadrado, y ese Dm^2 contendrá 10 veces 10 m^2 ó sea 100 m^2.

10 m



10 m

El Dm^2 contiene, pues, 100 m^2.

Se demuestra del mismo modo que un Hm^2 contiene 100 Dm^2, y, por consiguiente 10000 m^2; que un Km^2 contiene 100 Hm^2, y, por consiguiente 1000000 m^2, etc.; y que, igualmente, los submúltiplos son de 100 en 100 veces menores.

Se sigue de aquí, por ejemplo, que siendo el área igual á un decámetro cuadrado, la centésima parte del área, ó *centiárea* = 1 m^2.

Numeración escrita de las superficies

Resulta de lo que precede que para la escritura de los números que representan superficies se habrán de reservar lugares de dos cifras para cada unidad consecutiva.

En efecto, para escribir unidades de 10 en 10 veces mayores, basta un lugar para cada unidad de un orden cualquiera, pues cada una de éstas es 10 veces mayor que su inferior inmediata, ó representa decenas de la unidad que ocupa el lugar inmediato inferior; pero se necesita un lugar más ó dos lugares para unidades de 100 en 100 veces mayores, ya que cada una de éstas es 100 veces mayor que su inferior inmediata, ó 100 veces menor que su inmediata superior.

Para escribir un número representante de superficies se emplearán, pues, lugares de dos cifras para cada unidad.

Ejemplos: 3 decímetros cuadrados, 7 metros cuadrados se escribirán $0^{m^2}03$, 7 m^2. Cuarenta metros cuadrados, quince decímetros cuadrados se escribirán 40 m^2, $0^{m^2}15$

163 m^2, 942587 se leerá: Ciento sesenta y tres metros cuadrados, noventa y cuatro decímetros cuadrados, veinticinco centímetros cuadrados, ochenta y siete milímetros cuadrados (ó un decámetro cuadrado, sesenta y tres metros cuadrados, etc.)

En la práctica no existen patrones de superficies, es decir, no existe módulo material que represente, por ejemplo, una superficie de 1 m^2. Los patrones que sirven para la medida de las superficies son las de longitud, porque la medida de una superficie puede siempre referirse, como veremos en Geometría, á medidas de longitud. Acabamos de ver, por ejemplo, que la superficie de un cuadrado podía considerarse como igual al producto de la longitud por la anchura de ese cuadrado, ó al producto de la longitud de un lado por sí misma (por ser la longitud del cuadrado igual á su anchura).

Del mismo modo que el metro, sus múltiplos y sus submúltiplos se escogen para unidades según las circunstancias y por comodidad; también el metro cuadrado, sus múltiplos y sus submúltiplos se escogen para unidades según la superficie que haya de medirse y las condiciones en que se hallen.

El metro cuadrado sirve para la medida de superficies cuyas dimensiones (longitud, anchura) se miden cómodamente con el metro. Ejemplos: una pared, un techo, un pavimento, un patio, un jardín, etc.

Los submúltiplos del metro cuadrado sirven para medir superficies cuyas dimensiones se miden cómodamente por los submúltiplos del metro. Ejemplo: la superficie de una caja, una tablilla, un cristal, una hoja de papel, etc., y, en general, todas las superficies cuyas dimensiones sean inferiores á un metro. Se dirá: esta tablilla, esta hoja de papel tienen tantos decímetros cuadrados, ó tantos centímetros cuadrados. Esta etiqueta tiene tantos milímetros cuadrados.

Así mismo los múltiplos del metro sirven para la medida de superficies fuera de proporción con el metro y en proporción con sus múltiplos. En particular la *área* (a), su múltiplo la *hectárea* (ha) y su submúltiplo la *centiárea* (ca) se emplean en la medida de grandes snperficies de terreno (campos, prados, bosques, colonias agrícolas, etc.)

Se observará que la centiárea, el área y la hectárea, que corresponden respectivamente al m^2, al Dm^2 y al Hm^2 son unidades de 100 en 100 veces mayores, y que se les aplica el sistema centesimal de numeración. Se dirá, por ejemplo: Diez hectáreas, ocho áreas, treinta y cinco centiáreas, y se escribirá: 10 ^{ha}, 08 ^{a}, 35 ^{ca}, ó 10 ^{ha}, 0835.

En las medidas llamadas *topográficas* y que podrían llamarse también geográficas, la unidad escogida es el kilómetro cuadrado, siendo frecuente evaluar en leguas las distancias (1 legua = 4000 m.)

Unidad de volumen. — El metro cúbico

La unidad escogida para medir los volúmenes es el *metro cúbico* (MC.) ó sea un cubo construído por medio del metro; un cubo que tiene un metro de largo, un metro de ancho y un metro de alto; un cubo cuyas faces todas tienen un metro cuadrado.

Múltiplos y submúltiplos del metro cúbico

Los múltiplos y submúltiplos del metro cúbico son las unidades de medida de 1000 en 1000 mayores ó menores que el metro cúbico.

No suele darse nombre particular á los múltiplos del cubo. No se dirá, por ejemplo, un decámetro cúbico, sino sencillamente diez metros cúbicos.

Los submúltiplos del metro cúbico son:

El *decímetro cúbico* (dm^3) = cubo de 0 m, 1 decímetro de lado = 0 m^3, 001 (véase más abajo).

El *centímetro cúbico* (cm^3) = cubo de 0 m, 01 centímetro de lado = 0 m^3, 000001 (véase más abajo).

El *milímetro cúbico* (mm^3) = cubo de 0 m, 001 milímetro de lado = 0 m^3, 000 000 001 (véase más abajo).

La numeración de los volúmenes es milesimal

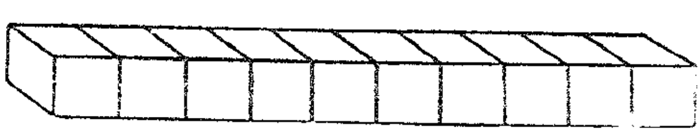
Hemos visto que la numeración de las *longitudes* (una dimensión) es *decimal,* es decir, que las diferentes unidades consecutivas de longitud son de 10 en 10 veces mayores ó menores. Hemos visto también que la numeración de las *superficies* (dos dimensiones: longitud, anchura) es *centesimal*, es decir, que las diferentes unidades consecutivas de superficie son de 100 en 100 veces mayores ó menores. Vamos á demostrar que la numeración de los *volúmenes* (tres dimensiones: longitud, anchura, altura) es *milesimal,* es decir, que las diferentes unidades consecutivas de volumen son de 1000 en 1000 veces mayores ó menores.

Vamos á demostrar; por ejemplo, que el metro cúbico (m^3) es 1000 veces mayor que el decímetro cúbico (dm^3), ó, en otros términos, que el m^3 contiene 1000 dm^3.

En efecto, sea un dm^3, ó un cubo que tenga 1 dm. de lado.

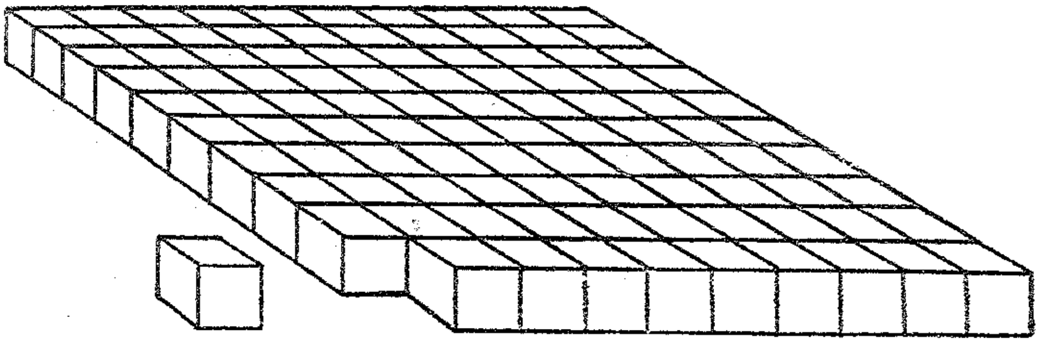
dm^3

Si coloco 10 cubos iguales á este dm^3 al lado los unos de los otros sobre una misma línea, tendré un conjunto que representará un volumen de 10 dm^3 ó 1 m de largo, 1 dm^2 de ancho y 1 dm de alto.

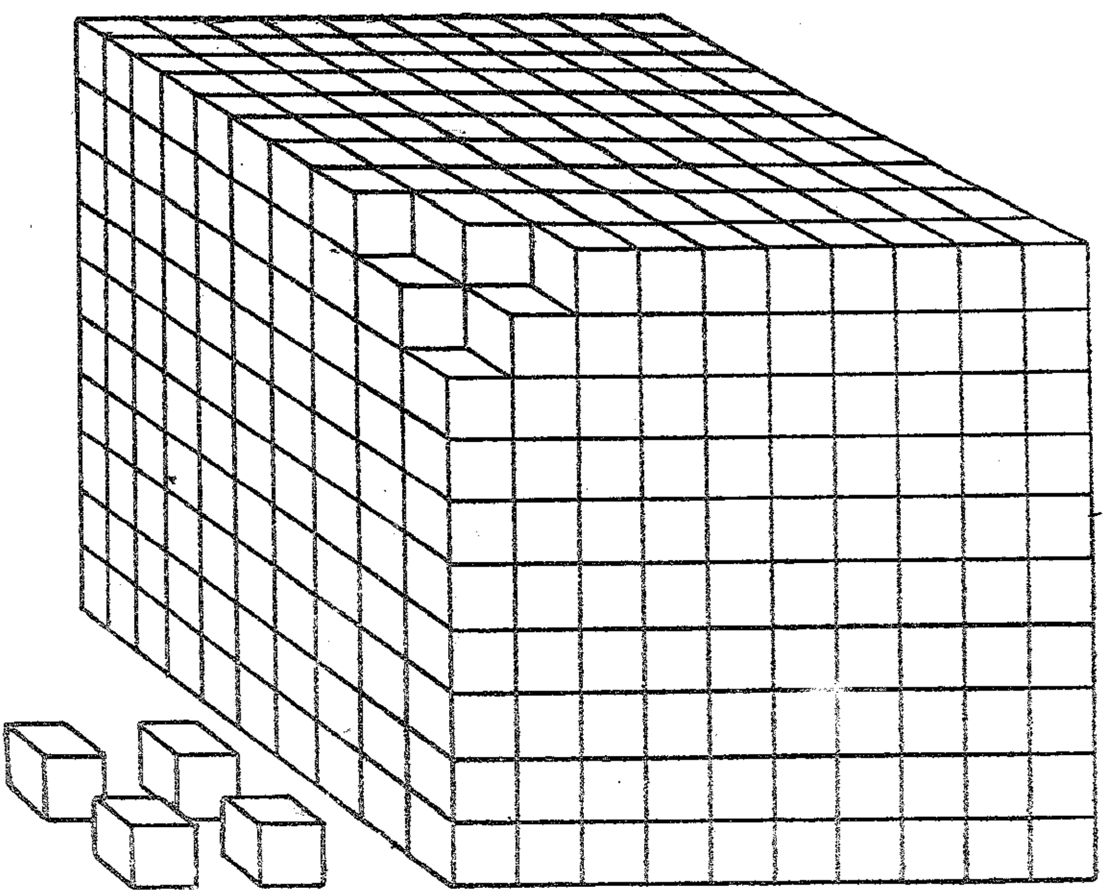


10 dm^3

Si en el sentido de la anchura, coloco 10 de esos volúmenes al lado los unos de los otros, tendré un conjunto de 10 veces 10 decímetros cúbicos (ó 100 decímetros cúbicos) que representará un volumen de 10 dm ó 1 m de largo, 10 dm ó 1 m de ancho y 1 dm de alto



Si en el sentido de la altura, coloco 10 de estos volúmenes, los unos sobre los otros, tendré un conjunto de 10 veces 100 decímetros cúbicos (ó 1000 decímetros cúbicos), que representará un volumen de 10 dm ó 1 m de largo, 10 dm ó 1 m de ancho, 10 dm ó 1 m de alto, que representará 1 m^3.



Se ve que este m^3 contiene 1000 decámetros cúbicos.

Se demuestra del mismo modo que un dm^3 contiene 1000 cm^3 y, por consiguiente, que 1 m^3 contiene 1000000 centímetros cúbicos; y que 1 cm^3 contiene 1000 mm^3 y, por consiguiente, que 1 m^3 contiene 1000000000 mm^3.

Numeración escrita de los volúmenes

Resulta de lo que precede que, para la escritura de los números que representan volúmenes, deberán reservarse lugares de tres cifras para cada unidad consecutiva.

En efecto, hemos visto que para escribir unidades de 10 en 10 veces mayores, basta un lugar para cada unidad de un orden cualquiera y dos lugares para las unidades que aumentan de 100 en 100; por consiguiente, para unidades que son de 1000 en 1000 veces mayores se necesita un tercer lugar más ó tres lugares por unidad, pues cada una de éstas es 1000 veces mayor que su inferior inmediata y 1000 veces menor que su inmediata superior.

Para escribir un número representando volúmenes, se reservarán, pues, lugares de 3 cifras para cada unidad.

Ejemplos: Ciento veinte metros cúbicos, sesenta y tres decímetros cúbicos, se escribirán 120 m^3, $0^{m^3}063$

$4^{m^3},457008$ se leerá: cuatro metros cúbicos, cuatrocientos cincuenta y siete decímetros cúbicos, ocho centímetros cúbicos.

En consecuencia de lo que precede, si se quieren convertir unidades de *longitud* en unidades superiores ó inferiores, basta (siendo esas unidades de 10 en 10 veces mayores) mudar la coma 1, 2, 3, etc. lugares hacia la izquierda ó hacia la derecha; si se quieren convertir unidades de *superficie* en unidades superiores é inferiores, basta (siendo esas unidades de 100 en 100 veces mayores) mudar la coma de 2, 4, 6, etc. lugares hacia la izquierda ó hacia la derecha; si se quieren convertir unidades de volumen en unidades superiores ó inferiores, basta (siendo esas unidades de 1000 en 1000 veces mayores) mudar la coma de 3, 6, 9, etc. lugares hacia la izquierda ó hacia la derecha.

Ejemplos: 12'55 m = 125'5 dm = 1255 cm; 4'2842 m^2 = 428'42 dm^2 = 42842 cm^2; 72'260315 m^3 = 72260'315 dm^3 = 72260315 cm^3.

En la práctica no existen patrones de volúmenes aparte de lo que se llaman *medidas de capacidad*, de las cuales hablaremos después. No existe módulo que represente, por ejemplo, un volumen de 1 m^3. Los patrones que sirven para la medida de los volúmenes son los de la longitud, porque la medida de un volumen puede siempre referirse, como veremos en geometría, á medidas de longitud. Acabamos de ver, por ejemplo, que el volumen de un *cubo*, puede considerarse como igual al producto de la longitud por la anchura, multiplicado por la altura ó (siendo iguales el largo, el ancho y el alto del cuadrado) al producto de la longitud por sí misma, y multiplicado aun por sí misma.

Lo mismo que el metro, el m^3, sus múltiplos y submúltiplos se escogen por unidades según las circunstancias y por comodidad; por lo mismo el m^3 y, sobre todo, sus submúltiplos se escogen por unidades según los volúmenes que han de medirse y las condiciones en que uno se halle.

El m^3 sirve para medir volúmenes cuyas dimensiones (largo, ancho, alto) se miden cómodamente con el m. Ejemplos: una habitación, una caja.

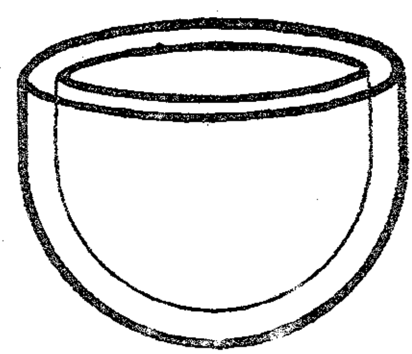
Del mismo modo los submúltiplos del m^3 sirven para medir los volúmenes cuyas dimensiones se miden cómodamente con los submúltiplos del metro. Ejemplos: una cajita, un dedal. Se dirá: esta cajita, este dedal tienen tantos centímetros cúbicos.

Señalaremos como medida práctica usada para la leña el *esterio* *, caja de 1 m de altura y de 1 m^3 de capacidad, con la cual puede medirse fácilmente 1 m^3 de leña si las piezas de leña tuvieran todas 1 m de largo, lo que no es generalmente del caso. En esa circunstancia es preciso recurrir á un cálculo.

Medidas de capacidad

Sabemos y veremos en geometría que el volumen de un cuerpo es el sitio comprendido en las superficies de un cuerpo, pudiendo ser considerado como el límite entre el cuerpo y el resto del espacio.

Pero un cuerpo puede ser hueco. En ese caso, se podrá considerar, no solamente su *volumen exterior*, comprendido en sus superficies exteriores, sino también su volumen interior, llamado *capacidad* ó *cabida* y que se representa por el sitio comprendido en las superficies interiores.



Estos dos volúmenes difieren el uno del otro por el *espesor*.

En la práctica existen módulos (patrones especiales de medida) para medir la capacidad ó la cabida

* Muéstrese á los niños un *esterio* ó la representación de un *esterio*.

de los líquidos, de los granos, de las legumbres ó de los frutos pequeños. Claro es que si hay agua en un vaso ó en un recipiente cualquiera, no puede conocerse su medida si no se conoce la medida del recipiente. Si se amontonan en recipientes granos, legumbres ó frutos pequeños, no se podrán medir fácilmente los montones de formas irregulares y de volúmenes desconocidos de antemano, como no se les podrá medir si se desconoce la cabida de los recipientes. Es, pues, indispensable, para esa clase de medidas, tener recipientes cuyo volumen interior sea conocido. Bastará entonces llenarlos de líquidos ó de pequeños objetos que hayan de medirse para conocer la medida de esos líquidos ó de esos pequeños objetos.

La principal unidad de capacidad es el *litro* *, cuya cabida es un *decímetro cúbico*.

Los múltiplos y submúltiplos del litro son:

El *decálitro* (Dl) $= 10\,\mathrm{l} = 10\,\mathrm{dm}^3 = 0\mathrm{m}^3{,}010$;

El *hectòlitro* (Hl) $= 100\,\mathrm{l} = 100\,\mathrm{dm}^3 = 0\mathrm{m}^3{,}100$;

El *decílitro* (dl) $= \frac{1}{10}$ de $\mathrm{l} = 0\,\mathrm{l},\ 1 = 0\mathrm{dm}^3{,}1 = 0\mathrm{m}^3{,}000100$ cmc;

El *centílitro* (cl) $= \frac{1}{100}$ de $\mathrm{l} = 0\,\mathrm{l},01 = 0\mathrm{dm}^3{,}01 = 0\mathrm{m}^3{,}000010$.

SE OBSERVARÁ QUE SIENDO EL LITRO, SUS MÚLTIPLOS Y SUS SUBMÚLTIPLOS UNIDADES DE 10 EN 10 VECES MAYORES Y MENORES, PUEDE APLICÁRSELES EL SISTEMA DECIMAL DE NUMERACIÓN.

---

* Muéstrese á los alumnos un litro de hoja de lata y de cristal, para líquidos, un litro de madera para granos y pequeños objetos. Muéstreseles también, si es posible, múltiplos y submúltiplos del litro al natural.

Unidad de peso. — El gramo

Nos damos cuenta de que, para separar un cuerpo de la tierra ó para impedirle acercarse á ella, ha de hacerse un *esfuerzo*, y llamamos *trabajo* al resultado de ese esfuerzo *.

Nos damos cuenta de que, para un mismo cuerpo ó para dos cuerpos idénticos, el esfuerzo es el mismo cuando se trata de separar un cuerpo á una misma distancia de la tierra, ó cuando un mismo cuerpo ó dos cuerpos idénticos, hallándose á una misma distancia de la tierra, se trata de impedirlos acercarse á ella **.

Nos damos cuenta de que el esfuerzo es diferente cuando se trata, por ejemplo, de separar de la tierra, sea un mismo objeto á una distancia mayor, sea dos objetos á la misma distancia.

Podemos, pues, llamar *peso* de un cuerpo, el esfuerzo con que ese cuerpo tiende hacia la tierra. Vemos en otro lugar que el peso de un cuerpo puede ser considerado como la medida de la *energía de distancia* que se manifiesta entre ese cuerpo y la tierra, y que el peso de un mismo cuerpo varía según su distancia á la tierra y según los lugares (la acción ejercida por un cuerpo que puede siempre suponerse que emana del centro del cuerpo y el radio de la tierra, disminuyendo entre el ecuador y el polo). Veremos también *** que el peso debe considerarse como una *unidad* práctica para un lugar determinado.

---

* Véase *La Substancia Universal.*

** Demuéstrese á los alumnos por medio de dos objetos, uno pesado y otro ligero.

*** Véase *La Substancia Universal.*

Veremos igualmente en otro lugar lo que es una balanza* (aplicación de la teoría de las palancas).

Por el momento describiremos las unidades que han sido escogidas para medir los pesos, es decir, el esfuerzo con que los cuerpos tienden hacia la tierra.

La unidad escogida para medir los pesos es el GRAMO (del griego GRAMME = *línea, rasgo). El gramo es el peso, en París, de un centímetro cúbico de agua destilada, á la temperatura de 4 grados centígrados* (es decir, á su máximum de densidad).

Múltiplos y submúltiplos del gramo

Los *múltiplos del gramo*, es decir, las unidades de medida de 10 en 10 veces mayores que el gramo son:

El *decágramo*(Dg) = 10 gr.

El *hectogramo*(Hg) = 100 gr.

El *kilogramo*(Kg) = 1000 gr.

La *tonelada* = 1000 kilogramos **.

Los patrones de peso conservados en París en diferentes sitios y especialmente en los Archivos y en el Conservatorio de Artes y Oficios son del peso de un kilogramo.

Los *submúltiplos del gramo*, es decir, las unidades de medida de 10 en 10 veces menos que el gramo son:

El *decigramo*(dg) $= \frac{1}{10}$ de gr. $= 0$ gr, 1

El *centigramo*(cg) $= \frac{1}{100}$ de gr. $= 0$ gr, 01

El *miligramo*(mg) $= \frac{1}{1000}$ de gr. $= 0$ gr, 001

* Muéstrese á los alumnos una balanza y pesas y practíquese una pesada.

** Para los países donde está adoptado el sistema métrico. La tonelada inglesa tiene cerca de 1015 kilogramos.

A estas unidades conviene añadir el quilate = $205^{mg},5$ (del árabe KOUARA = especie de grano, usado para las pesadas pequeñas).

Lo mismo que para las otras unidades, las diferentes unidades de peso se emplean según las circunstancias y por comodidad.

Los pesos empleados en la práctica son de hierro fundido, de base rectangular ó hexagonal, ó de cobre de forma generalmente cilíndrica *.

Cuando se trata de apreciar los pesos inferiores al gramo ** se utilizan laminillas y el quilate y sus submúltiplos $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}\right)$ de quilate se emplean para pesar piedras preciosas. Estos últimos son particularmente de uso comercial y no subsistirán en una sociedad científica y razonable. La elección de $205^{mg},5$ es completamente arbitraria.

Se observará que siendo el gramo, sus múltiplos y submúltiplos (excepto el quilate) unidades de 10 en 10 mayores ó menores, puede aplicárseles el sistema decimal de numeración.

Medida de la densidad de los cuerpos

Sabemos ya medir el peso de los cuerpos y podemos comprobar con exactitud, por medio de la balanza, la diferencia de los cuerpos entre sí respecto del peso.

Como sabemos lo que es el volumen, percibimos que muchos cuerpos pueden tener el mismo volumen sin tener el mismo peso, y que muchos cuerpos pueden tener el mismo peso sin tener el mismo volumen.

---

* Muéstrense pesos de esa clase á los alumnos.

** O más bien al medio gramo. Cada una de las medidas de peso y de capacidad tienen también su doble y su mitad.

Ejemplos: Un decímetro cúbico de agua pesa menos que un decímetro cúbico de hierro. Un kilogramo de corcho ocupa un volumen mayor que un kilogramo de plomo.

Inmediatamente acude la idea de comparar los diferentes pesos de los cuerpos bajo un mismo volumen, y llamaremos densidad ó *peso específico de un cuerpo* el peso de la unidad de volumen de ese cuerpo.

Sabemos que medir significa comparar una cosa con otra de la misma naturaleza tomada como tipo. Para medir las densidades conviene, pues, compararlas á cierta densidad tomada como tipo. La densidad escogida ha sido la del agua y podemos decir que *la densidad ó peso específico de un cuerpo es el cociente del peso de una cantidad cualquiera de ese cuerpo dividido por el peso del mismo volumen de agua.*

Para comprender bien lo que precede, conviene observar (lo que después explicaremos detalladamente) que una relación es la expresión de una comparación, y acordarse de que una medida es una comparación y puede expresarse siempre por números.

Sabemos, en efecto, que si hemos de medir una longitud por medio del metro, y si el metro puede ser relacionado, por ejemplo, 4 veces sobre esta longitud, no haremos otra cosa que comparar el metro (unidad) que llamaremos 1 á la longitud medida que llamaremos 4, y diremos que la longitud medida iguala 4 veces la unidad, 4 veces $1 = 4$ metros. Podemos considerar también que la longitud puede ser *dividida* en 4 partes, iguales cada una á la unidad, y diremos entonces que esta longitud es igual á 4 unidades $= \frac{4}{1} =$ metros, siendo 4 el *cociente* de la división de 4 por 1.

Así, pues, el resultado de una medida, es decir, el resultado de la comparación de una cosa que ha de medirse con la unidad de medida, podrá expresarse siempre por una relación, es decir, por el enunciado de una división ó por el cociente de esta división si esta división se efectúa. En otros términos: una división puede servir para comparar la cosa que ha de medirse á la unidad de medida escogida, dividiendo la cosa que ha de medirse por la unidad de medida.

Ahora comprendemos por qué, si se quiere medir la densidad de un cuerpo, es decir, comparar el peso de este cuerpo con su volumen, conviene expresar el resultado de esta comparación por una relación en la cual la cosa que ha demedirse (peso) será dividida por la unidad de medida escogida (el volumen que ocupa el peso). Si se llama el peso P, el volumen V y la densidad D, se dirá:

$$D = \frac{P}{V}$$

lo que significa que podremos encontrar la densidad de un cuerpo dividiendo su peso por su volumen.

Ahora bien, sabemos (véase Segunda Parte, división) que el cociente $\times$ el divisor $=$ al dividiendo; podremos, pues, decir también:

$$P = V\ D$$

lo que nos permitirá, conociendo el volumen y la densidad de un cuerpo, encontrar su peso multiplicando el volumen por la densidad.

Por último, sabiendo (véase Segunda Parte, división) que el dividendo dividido por el cociente es igual al divisor, podremos, pues, decir aún:

$$V = \frac{P}{D}$$

lo que nos permitirá, conociendo el peso y la densidad de un cuerpo, hallar su volumen multiplicando el peso por la densidad.

Para comparar entre sí las densidades de los diferentes cuerpos, es decir, darse cuenta de la diferencia de peso de los diferentes cuerpos bajo el mismo volumen, para medir las diferentes densidades, se comparará sencillamente cada una de ellas á una unidad de densidad, á cierta densidad tomada como tipo. Esta densidad escogida es la del agua.

A este fin será indispensable, para darse cuenta del peso que tienen los diferentes cuerpos bajo un volumen determinado y con relación al peso del agua, pesar siempre volúmenes iguales de un cuerpo y de agua, y comparar estos dos pesos entre sí. Siendo el peso del agua considerado como unidad, se expresará la *relación* de la densidad del cuerpo con la del agua por el enunciado de una división, en que el dividendo será el peso del cuerpo y el divisor el peso del agua bajo el mismo volumen. El cociente de esta división será considerado como expresión de la densidad del cuerpo con relación al agua, lo que equivale á decir (véase más arriba): «La densidad ó peso específico de un cuerpo es el cociente del peso de una cantidad cualquiera de ese cuerpo dividido por el peso del mismo volumen de agua.»

Se concibe fácilmente que es posible formular *tablas de densidades*, determinando así la densidad de los diferentes cuerpos con relación á la del agua. Esas tablas nos suministran un medio de clasificar los diferentes cuerpos y después veremos cuán importantes son.

Bastará insistir aquí una vez más sobre el apoyo que se prestan las diferentes ciencias y sobre la imposibilidad de hacer un estudio serio cualquiera si no se conoce la Aritmética. Los ejercicios sobre los pesos, los volúmenes y las densidades mostrarán la importancia práctica de lo que precede.

Es de notar que el sistema métrico, que establece una correspondencia entre los pesos y los volúmenes del agua (1 g = 1 cmc), facilita mucho las operaciones relativas á las densidades.

Volumen específico

Nos ha ocurrido la idea de comparar los diferentes pesos de los cuerpos bajo un mismo volumen, y hemos llamado *densidad* ó *peso específico* al peso de la unidad de volumen de un cuerpo.

Consiguientemente se nos ocurre la idea de comparar los diferentes volúmenes de los cuerpos bajo un mismo peso, y llamaremos *volumen específico* el volumen de la unidad de peso de ese cuerpo.

Se ve, refiriéndose á lo que precede, que, si la densidad ó peso específico se expresa dividiendo el peso de un cuerpo con su volumen, el volumen específico se expresará dividiendo el volumen de un cuerpo por su peso.

Unidad de moneda. — La peseta.

No nos será difícil mostrar en otro lugar cómo podría organizarse una sociedad de individuos razonables capaces de darse cuenta del conjunto de los conocimientos humanos y deducir de él las consecuencias lógicas.

Estos individuos llegarían pronto á concebir la substancia *(lo que es)* como estando en perpetua transformación y á comprender que sucede lo mismo á la substancia humana. Un ser humano, para vivir, tiene necesidad de asimilar y de eliminar constantemente, es decir, de tomar prestado sin cesar al medio ambiente la substancia necesaria para su vida y de restituir constantemente á ese mismo medio la substancia usada. De tal manera que el problema social puede ser enunciado del modo siguiente:

¿Cómo deben organizarse los hombres para que cada uno pueda satisfacer, en todos los momentos, todas sus necesidades racionales (asimilación, eliminación) con el mínimum de esfuerzo?

Semejante problema no puede ser resuelto sino por la unión de todos los hombres razonables. En efecto, un individuo entregado á sus solos medios, no puede lograr, donde quiera que se halle, que le llegue la substancia de que tiene necesidad en el momento que la necesite, ni alejar de sí en el momento preciso la substancia nociva. EN CONSECUENCIA, LOS INDIVIDUOS RAZONABLES DEBEN ENTENDERSE PARA TRABAJAR EN COMÚN EN LA CIRCULACIÓN DE LA SUBSTANCIA Y EN LA SELECCIÓN EN PROVECHO DE LA ESPECIE HUMANA. Deseosos de consumir según sus necesidades, lo serán igualmente de producir según las necesidades generales.

Entretanto, basta fijar la mirada en la organización social actual para ver cuán defectuosa es. Un individuo consume, no cuando tiene necesidad, sino cuando puede pagar. Un individuo produce, no según sus necesidades, sino según su posición social. Se restringe la producción, no falta de consumidores, sino falta de compradores; porque la producción actual se inquieta por alimentar á los que pagan y no se interesa por los otros. Si hay exceso de producción, causa inquietud, no proveer las necesidades del indigente, sino producir menos para impedir que baje el precio de venta.

Conviene hacer que los niños comprendan bien que la organización racional y científica de la producción y del consumo sólo puede establecerse fuera de toda coerción, gracias al deseo de los individuos de que cese la explotación humana y de establecer relaciones basadas, no sobre el comercio, sino sobre la fraternidad.

Aquel día la concepción del dinero se hará inadmisible. Ya en la sociedad actual entre padres é hijos, entre hermanos, entre amigos, hay otros principios diferentes de los principios mercantiles. No se reclama el importe de la comida al que se invita á la mesa; los diversos miembros de una familia no comen á prorata de lo que ganan; no se deja morir de hambre á los enfermos, á los niños ni á los débiles, y la dulzura del comunismo hace soportables unas relaciones que, sin eso, serían regidas por el mercantilismo universal.

Y, sin embargo, desde la más tierna edad se enseña á los niños á servirse de la aritmética, no para resolver el problema social, lo que sería fácil, sino para resolver problemas de la explotación de su semejante. Particularmente los párrafos concernientes á las monedas y sus usos están bien hechos para predisponer á los niños á ser negociantes rapaces y para extender la falsa idea de que el dinero es indispensable.

La verdad es que esa concepción del dinero conduce, como hemos indicado, á una repartición inicua del trabajo y de la producción. Puede decirse que la supresión de la explotación entre los hombres y su reemplazo por la organización racional de la circulación de la substancia, vendrán, inevitablemente, en cuanto desaparezca la ignorancia dejando libre acceso á la ciencia y á la razón. Aquel día la justicia reemplazará al comercio y el dinero no tendrá ya más razón de ser que las armas de guerra.

Dicho esto, no hay inconveniente en indicar el sistema de moneda en uso en nuestra época, es decir, en una época que las generaciones ulteriores, más razonables, clasificarán seguramente aún entre los períodos de barbarie.

Si los productos circulasen de tal manera que pudieran estar á disposición de los que de ellos necesitan en el momento de la necesidad, no habría lugar á disputarse esos productos. No sucede así en nuestros días, en que los hombres hacen demasiados *movimientos perjudiciales e inútiles* para hallar el tiempo de hacer movimientos útiles. Aprenden á matarse unos á otros, y se entregan á vanas especulaciones (ejército, marina, funcionarismo, prácticas religiosas, etc.) *en vez de organizar metódicamente la circulación de los productos.*

De ahí resulta que los productos no estén á la disposición de los que los necesitan cuando sienten la necesidad; que ciertos productos son raros, y que los hombres se disputan por la satisfacción de sus necesidades.

Entonces sobreviene la concepción del cambio de mercancías, es decir, la idea de pasar ciertos productos de que no se tiene necesidad (ó de que se tiene menos necesidad) á otros individuos que tendrán necesidad de ellos (ó más necesidad) *á condición* de que esos otros individuos den en cambio otros productos.

Esta *condición* pone una traba á la circulación normal, que habría de consistir en hacer circular simplemente y *sin condición* los productos hacia los que de ellos tuvieran necesidad. En efecto, si el que quiere cambiar no encuentra nada que cambiar contra lo que tiene, ó si no tiene nada que dar en cambio de lo que necesita, los productos se acumularán en ciertos puntos y no alcanzarán á los necesitados. Además, los productores de esos productos se abstendrán de producir, de modo que puede sobrevenir la escasez, no á consecuencia de la falta natural de una substancia, sino como resultado de la *falsa teoría de cambio* aplicada en lugar de la *justa teoría de circulación racional.*

Siendo esa teoría falsa actualmente practicada, y habiéndose establecido el uso de los cambios, ha sido preciso, para hacer cambios, determinar en la práctica *cuánto* se pediría por un producto dado para consentir en ceder otro producto, y se ha llegado entonces á la idea de *valor* de los objetos.

Siendo el valor de un objeto la cantidad de los otros objetos que se pedirá para ceder este objeto, es fácil de comprender que determinar un valor es hacer una operación de *medida.* Para hacer esta operación se ha llegado á escoger unas *unidades de valor* ó *monedas,* es decir, cantidades determinadas de objetos tipos, á los cuales se comparará la cantidad de objetos de cambio. Estas monedas, después de haber sido en tiempos pasados de las más diversas materias, como sal, pescado, granos, cuero, conchas, etc., son actualmente y casi en todas partes ciertos metales, de tal manera que *el valor de un objeto* puede definirse *el peso de ciertos metales (oro, plata, cobre, níquel, etc.) contra el cual puede ser cambiado este objeto.*

El valor de un objeto así determinado por su comparación con la moneda se llama el *precio* del objeto.

La unidad escogida para medir el valor, *la unidad de moneda** es en España, la *peseta,* pieza que pesa 5 gramos y contiene 835 partes de plata por 165

* Del latín MONERE = *avisar.*

partes de cobre, lo que se expresa habitualmente diciendo *al título legal* de 835 m. (El título*, es decir, la proporción del llamado metal llamado precioso se determina por una ley, es decir, por la arbitrariedad de los hombres.)

Múltiplos y submúltiplos de la peseta

Los múltiplos y submúltiplos de la peseta son:

		PESO	TÍTULO
ORO . .	La pieza de 100 pesetas	32 gr. 258	900 m.
	» » 50 »	16 » 129	
	» » 25 »	8 » 064	
	» » 20 »	6 » 452	
	» » 10 »	3 » 226	
	» » 5 »	1 » 613	
PLATA .	La pieza de 5 pesetas	25 gr.	835
	» » 2 »	10 »	
	» » 1/2 0'50 cs.	2 » 500	
COBRE .	La pieza de 0'10 — cs.	10 »	950 **
	» » 0'05 — cs.	5 »	

Se observará que la peseta y sus múltiplos y submúltiplos, como unidades de 10 en 10 veces mayores ó menores, se les puede aplicar el sistema decimal de numeración.

Billetes de banco

Los *billetes de banco* permiten ser asimilados á promesas de dar ciertas cantidades de monedas.

---

* Para dar más duración á las piezas de moneda, que están sujetas á un roce continuo, se añade generalmente al oro, cobre; á la plata, cobre y zinc; al cobre, estaño y zinc. Estas mezclas llámanse *liga*.

** Hay monedas de 2 céntimos y de 1 céntimo poco usadas.

Los bancos de Estado son arbitrariamente autorizados para emitir más billetes de banco (es decir, más promesas de pago) que la cantidad de moneda que tienen de reserva.

Tablas de conversión curso

No teniendo los diferentes países las mismas unidades de moneda, ha habido que establecer tablas de conversión para las transacciones. Los banqueros perciben un *derecho de cambio* variable por el cambio de los valores los unos contra los otros, y de ese modo las monedas tienen, con relación las unas á las otras y según los lugares y circunstancias, valores especiales que se llama *curso* y cuya *tasa* se determina.

Los problemas sobre las monedas, sobre el curso de cambio, etc. no se plantearán en una sociedad razonable, conforme hemos explicado. El *compañerismo* entre los hombres reemplazará la concurrencia y el comercio.

Unidad de tiempo. — El segundo

En sus *Elementos de química inórganica* (*capítulo primero. Principios generales*) W. Ostwald trata como sigue el asunto del *espacio* y del *tiempo:*

«Uno de los primeros conocimientos que adquirimos es la de la alternativa del día y de la noche. Esta alternativa de la claridad y de la obscuridad, que se reproduce regularmente en el medio en que vivimos, dió al hombre una noción fundamental, la del *tiempo*. Siendo absolutamente independiente de nuestra voluntad, nos sirve de medida *objetiva* para los fenómenos, y referimos los acontecimientos á los signos y marcas que nos suministra la sucesión alternada de los días y de las noches.

»Siendo esta medida demasiado grande para muchos fenómenos, se le ha dividido en partes más pequeñas. La vigésima cuarta parte del período diurno sirve de unidad, bajo el nombre de *hora*, para las necesidades de la vida práctica. Para las necesidades científicas, se emplea como unidad, bajo el nombre de *segundo*, el $\frac{1}{3600}$ de la hora, ó dicho de otro modo, el $\frac{1}{86400}$ del período diurno total.

»Por otra parte, la experiencia nos demuestra que una multiplicidad innumerable de cosas diversas puede existir á la vez *en el mismo tiempo*. Esta pluralidad ha dado lugar á la concepción de *espacio*. Se entiende por *espacio* el medio común y homogéneo que sirve para colocar y para ver de una vez las cosas simultáneamente dadas...»

Los múltiplos del segundo

He aquí el cuadro de las unidades de tiempo que comprende el segundo y sus múltiplos.

La *hora* $= \frac{1}{24}$ de día $= 60$ minutos $= 3600$ segundos.

El *minuto* $= \frac{1}{1440}$ de día $= \frac{1}{60}$ de hora $= 60$ segundos.

El *segundo* $= \frac{1}{86400}$ de día $= \frac{1}{3600}$ de hora $= \frac{1}{60}$ de minuto.

En resumen: el día contiene 24 horas, la hora contiene 60 minutos y el minuto contiene 60 segundos. Las divisiones de segundos se cuentan en décimas, centésimas, etc.

Medida del círculo

Se divide el *círculo* en 360 *grados;* el grado, en 60 minutos; el minuto, en 60 *segundos;* el segundo, en 60 *terceros*. Se representa la palabra grado por el signo $^{\circ}$; la palabra minuto, por el signo $'$; la palabra segundo, por el signo $''$; la palabra tercero, por el signo $'''$. Por ejemplo, 18 grados, 21 minutos, 6 segundos, 38 terceros, se escribirán: $18^{\circ}21'6''38'''$.

El medio más sencillo para practicar operaciones con los números llamados *números complejos*, consiste en reducir previamente todas las diferentes unidades en unidades del orden menor. Para convertir, por ejemplo, los grados en minutos, basta multiplicarlos por 60, puesto que $1^{\circ} = 60'$. Así también, para convertir los minutos en segundos, basta multiplicarlos por 60, puesto que $1' = 60''$, etc. Hecha esta conversión, se efectúa la operación, dividiendo, por ejemplo, segundos por segundos si se trata de una división de segundos; multiplicando segundos por segundos, por ejemplo, si se trata de una multiplicación de segundos, y, terminada la operación, se convierten en seguida, si ha lugar, los minutos del último orden en unidades de cada orden. Si, por ejemplo, el resultado de una operación da $119''$, se divide 119 por 60 para encontrar los minutos y se tendrá $1'$ y un resto de $59''$. $119'' = 1'59''$.

Respecto de las operaciones sobre los números compuestos, puede también procederse por retención. Sea, por ejemplo, adicionar

$$\begin{array}{rrr} & 38' & 24'' \\ + & 2' & 49'' \\ \hline = & 41' & 13'' \end{array}$$

Se dirá: $24'' + 49'' = 73'' = 60'' + 13'' = 1' +$

13″. Pongo 13″ y retengo 1′. 1′ retenido + 38′ + 2′ = 41′.

Si, por el contrario, se usase el primer procedimiento indicado se diría:

$$38' \times 60 = 2280'' + 24'' = 2304''$$
$$2' \times 60 = 120'' + 49'' = 169''$$
$$2304'' + 169'' = 2473''$$

4732″ divididos por 60 sumarán cierto número de minutos más un resto de segundos y se tendrá 2473″ = 41′13″.

Se ve que, en el caso presente, el procedimiento por retención es más práctico que el procedimiento por conversión.

Unidades C G S

Entre las diferentes unidades que acabamos de indicar, tres son *fundamentales,* por cuanto nos permiten estudiar todos los fenómenos desde el punto de vista del movimiento. La idea de movimiento implica las nociones siguientes:

1.° Un camino recorrido que medir;

2.° Una masa que recorre ese camino y que conviene medir;

3.° Un tiempo más ó menos largo que emplea la masa en recorrer el camino.

La unidad escogida para medir el *camino* es el *centímetro;* la unidad escogida para medir la *masa* * es la masa del gramo; la unidad escogida para medir el *tiempo* es el *segundo* sexagesimal de tiempo medio.

Sin insistir aquí sobre ese sistema de unidades C G S (centímetro, gramo, segundo) que desarrollaremos en otro lugar más extensamente, haremos

* Véase *La Substancia Universal.*

notar cuán cómodo es para comparar entre sí las velocidades y las variaciones de velocidad (aceleraciones).

Se llama *dina* (del griego DUNAMIS = *fuerza)* la unidad C G S de fuerza, á saber: la que es capaz de imprimir á la masa de un gramo una aceleración igual á un centímetro.

Esta concepción permite comparar la cantidad de trabajo realizado ó por realizar por las diferentes fuerzas *. La unidad C G S de energía (trabajo mecánico) es la *dina-centímetro* ó *erg,* á saber: la energía de una dina obrando sobre una longitud de un centímetro.

Refiriéndonos á lo que decíamos al principio de esta Segunda Parte, insistimos sobre la importancia capital que tiene para un individuo conocer exactamente las diferentes unidades en uso y sus relaciones entre sí, puesto que las unidades, una vez escogidas, el conocimiento del cálculo permite efectuar todas las medidas de los grandores, es decir, relacionar las medidas de los grandores á simples operaciones de cálculo.

Para terminar esta Segunda Parte, y antes de continuar el estudio del cálculo, réstanos indicar unos tipos de ejercicios que se refieren á las diferentes unidades que acabamos de enumerar.

---

* Formas de la energía (energía mecánica, térmica, eléctrica, magnética, etc., etc.)

CUADRO RECAPITULATIVO

DE LA SEGUNDA PARTE

Sistema métrico. — Sistema de unidades de medidas cuyo punto de partida es el metro.

Metro. — Unidad de longitud á 0 grados centigrados de un patrón de platino é iridio conservado en París, que representa aproximadamente la diezmillonésima parte del cuarto del meridiano terrestre. La numeración de las longitudes es decimal.

Múltiplos. — Deca = diez, hecto = ciento, kilo = mil, miria =diez mil. (Decámetro, hectómetro, kilómetro, miriámetro).

Submúltiplos. — Deci = décimo, centi = centésimo, mili = milésimo. (Decímetro, centímetro, milímetro) micrón = milésimo de milímetro.

Metro cuadrado. — Unidad de superficie. Cuadrado que tiene 1 m de largo y 1 m de ancho. Decámetro cuadrado (área) = 100 m²; hectómetro cuadrado (hectárea) = 10000 m², etc. Decímetro cuadrado = 0m²,01; centímetro cuadrado = 0m²,0001, etc. La numeración de las superficies es centesimal.

Metro cúbico. = Unidad de volumen. Cubo que tiene 1 m de largo, 1 m de ancho y 1 m de alto. No hay nombre particular para los múltiplos de m³. El decímetro cúbico = 0m³,001. El centímetro cúbico = 0m³,000001, etc. La numeración de los volúmenes es milesimal.

Litro. — Unidad de capacidad, cabida = 1 dmc. (Decálitro, hectólitro, decílitro, centílitro). La numeración de las unidades de capacidad es decimal.

Gramo. — Unidad de peso. Peso en París de un centímetro cúbico de agua destilada á 4 grados centigrados. (Decagramo, hectogramo, kilogramo, decigramo, centigramo, miligramo. La tonelada = 1000 kilog.) La numeración de los pesos es decimal.

Densidad ó peso específico. — Peso de la unidad de volumen de un cuerpo.

Volumen específico. — Volumen de la unidad de peso de un cuerpo.

Peseta. — Unidad de moneda = pieza que pesa 5 gramos y contiene 835 partes de plata (título 835 m) y 165 partes de cobre. Las otras piezas de plata de 5 pesetas, de 2 pesetas y de media peseta. Las piezas de oro (de título de 900 m) son de 100, 50, 25, 10 y 5 pesetas. Las piezas de bronce (de título de 950 m) son de 0,10, 0,5 y 0,2 céntimos de peseta. La numeración de las unidades de moneda es decimal. El uso de la moneda y sus consecuencias resulta del principio falso de concurrencia entre los humanos aplicado por las sociedades actuales y no se aplicará cuando los humanos razonables establezcan entre sí el principio justo de compañerismo.

Segundo.—Unidad de tiempo que representa la 86400ª parte del día. El día se divide en 24 horas, la hora en 60 minutos, el minuto en 60 segundos.

Grado. — Unidad de medida del círculo. (Se llama también grado la unidad de medida de la temperatura.) El grado, unidad de medida del círculo, es su 360ª parte. Está dividido en 60 minutos, el minuto en 60 segundos, el segundo en 60 terceros.

Unidad C G S (centímetro, gramo, segundo). — Son las unidades fundamentales que permiten estudiar todos los fenómenos desde el punto de vista del movimiento y medir todos los movimientos. Al efecto se concibe una masa que se mueve sobre cierto camino y en cierto tiempo. El camino se mide por el centímetro, la masa por el gramo y el tiempo por el segundo.

Medida. — Toda la ciencia (conocimiento humano) va á parar á la física matemática, que se convierte en definitiva en la utilización del cálculo por la medida de los grandores. La física matemática nos permite apreciar con exactitud la naturaleza y la intensidad de los fenómenos. Una operación de medida consiste esencialmente en la comparación de lo que se quiere medir con un módulo de la misma naturaleza.

Las fórmulas de física matemática no permiten efectuar rápidamente estas medidas.

Operaciones elementales sobre los números decimales. —Adición y sustracción, como los números enteros, cuidando de poner las comas unas debajo de otras. Multiplicación, separar del producto tantas cifras decimales como haya en los dos factores. División, multiplicar el dividendo y el divisor por 10, por 100, por 1000, etc., según el caso, de modo que se suprima la parte decimal. (Véase Tercera parte.)

EJERCICIOS Y PROBLEMAS
sobre el Sistema métrico
y sobre las Unidades fundamentales

I

Medidas de longitud. — Numeración

Enumerar las medidas de longitud.

¿Cuántos decímetros, centímetros, milímetros hay en un metro?

¿Cuántos kilómetros, hectómetros, decámetros, metros, decímetros, centímetros, milímetros hay en un miriámetro?

¿Cuántos hectómetros, decámetros, etc. hay en un kilómetro?

¿Cuántos decámetros, metros, decímetros, etc. hay en un decámetro?

Tomando el miriámetro por unidad, ¿cómo se llamarán los décimos de miriámetro? los centésimos? los milésimos? los diezmilésimos? etc.?

Tomando el kilómetro como unidad, ¿cómo se llamarán los décimos de kilómetro? los centésimos? etcétera?

Tomando el centímetro como unidad, ¿cómo se llamarán las longitudes 10 veces mayores? 100 veces? 1000 veces? etc.?

¿Cuál es la longitud del meridiano terrestre en metros? decámetros? hectómetros? etc.?

Cuando se cambia la coma uno, dos, tres lugares, etcétera, hacia la derecha, ¿en qué se convierten las diferentes unidades de longitud?

Cuando se cambia la coma uno, dos ó tres lugares, etcétera, hacia la izquierda ¿en qué se convierten las diferentes unidades de longitud?

Enunciar longitudes y hacerlas escribir.

Escribir longitudes y hacerlas leer.

Tomar un metro y hacer que se midan longitudes.

Medir la altura de una pieza, la longitud de una tabla de madera, la altura de un escalón de una escalera, la longitud de una fachada, el ancho de una ventana, etc.

Encargar á los alumnos que tomen medidas, unos midiendo, otros tomando notas.

II

Medidas de longitud. — Adición

Un cuerpo que cae en París en caída libre, es decir, sin velocidad inicial, habrá recorrido durante el primer segundo 4 m, 905; durante el segundo segundo, 14 m, 715; durante el tercero, 24 m, 525; durante el cuarto, 34 m, 335; durante el quinto, 44 m, 145. ¿Cuántos metros habrá recorrido al cabo de cinco segundos?

Escribir la distancia recorrida tomando sucesivamente por unidad el hectómetro, el kilómetro, el miriámetro, el decímetro, el centímetro, el milímetro.

Hacer un itinerario. Notar las distancias entre las diferentes localidades por las cuales se pasará. Calcular el camino que ha de recorrerse en metros, en kilómetros.

Encargar á los alumnos que tomen medidas de longitud y las adicionen.

III

Medidas de longitud. — Sustracción

La torre Eiffel tiene 300 m de altura, la mas alta pirámide de Egipto tiene 142 m. ¿Cuánta es la diferencia?

Medir la estatura de diferentes personas y calcular las diferencias.

Anotar la estatura de un niño en cierto momento y su estatura á 3 meses, 6 meses, un año, etc. después. ¿Cuánto habrá crecido en 3 meses? 6 meses? en un año? etc.?

Los glóbulos rojos más pequeños de la sangre tienen una 6 μ (microns) de diámetro y los mayores unos 9 microns, mientras que los glóbulos blancos, los más pequeños, tienen 8 μ y los mayores 20 μ y aun más. ¿Cuál es la diferencia en milímetros entre los pequeños glóbulos blancos y los pequeños glóbulos rojos, y entre los grandes glóbulos blancos y los grandes glóbulos rojos?

IV

Medidas de longitud. — Multiplicación

Un andarín recorre unos 5 km,2 por hora. ¿Cuántos metros habrá recorrido en 5 días si camina 8 horas diarias?

Medir la altura aproximada de los escalones de una escalera y contarlos. Decir á qué altura aproximada sobre el suelo se halla la cima de la escalera.

Un cuerpo que cae en París en caída libre, es decir, sin velocidad inicial, recorre en el primer segundo de caida 4m,905. Habrá recorrido al cabo del segundo segundo 4m,905 × 2 veces 2; al cabo del tercer segundo, 4m,905 × 3 veces 3 y, de una manera general, al cabo de cierto número de segundos, 4m,905 × ese cierto número de segundos multiplicado por sí mismo. ¿Cuántos metros habrá recorrido al cabo de un minuto (60 segundos).

Escribir la distancia recorrida tomando sucesivamente por unidad el miriámetro, el kilómetro, el decímetro, el centímetro, el milímetro.

Se ve desde una ventana una pared á la cual no es posible aproximarse para medir su altura; pero se sabe que está hecha de ladrillos cada hilada de los cuales tiene 68 milímetros de altura, y se cuentan 24 hiladas de ladrillos. ¿Qué altura tiene esa pared?

Hacer ejercicios de medidas de longitudes midiendo una de las partes iguales de una longitud y demostrar que se puede adquirir el hábito de evaluar las longitudes inaccesibles.

El sonido se propaga á razón de unos 340 m, 89 por segundo en el aire á la temperatura de unos 16 grados. Se oye una detonación de fusil 2 $^1/_2$ segundos después de haber visto el fogonazo y el humo salir del cañón del arma. ¿A qué distancia se está del tirador?

Durante una tempestad se ha visto un relámpago; se ha oído el trueno de ese relámpago 4 segundos después. ¿A qué distancia se estaba del punto en que se produjo el relámpago?

Se mide la circunferencia de una rueda de coche y se ve que tiene 482 centímetros. Se mira esa rueda mientras el coche camina, y se observa que una mancha que tiene esa rueda vuelve al mismo lugar 43 veces por minuto, lo que equivale á decir que la rueda da 43 vueltas por minuto. El coche marcha durante 3 horas y 57 segundos. Se sabe que una hora consta de 60 segundos. ¿Qué camino habrá recorrido próximamente el coche en el tiempo que ha caminado?

V

Medidas de longitud. — División

Un andarín ha recorrido en 6 $^1/_2$ días 283257 metros. Ha andado 9 horas diarias. ¿Cuántos kilómetros ha recorrido diariamente por término medio?

Desde 1.º de julio hasta 3 de diciembre inclusive, Pedro ha crecido 42 milímetros. ¿Cuánto ha crecido por día suponiendo que ha crecido por igual cada día?

Entro en mi casa. En el umbral hay 3 escalones; para llegar al primer piso hay 23 escalones; después hay 4 tramos de 19 escalones cada uno; por último, hay un tramo de 17 escalones que conduce á la buhardilla. Se me dice que la buhardilla está á 17 m, 85 sobre el nivel del suelo y que todos los escalones tienen la misma altura. ¿Cuál es la altura de uno de los escalones?

Pedro y Gustavo van juntos por un camino. Se entretienen contando los pasos que dan en el curso de un kilómetro. Pedro anda 1784 pasos y Gustavo 1886 pasos. Suponiendo que todos los pasos de Pedro son iguales, y que todos los de Gustavo son iguales también, ¿cuál es la longitud en milímetros de los pasos de cada uno de ellos?

Para poner un hilo telegráfico de una longitud de 2 Mm, 5674 se han necesitado 264 rollos de hilo. ¿Qué longitud de hilo hay en cada rollo?

En un momento en que la Tierra se halla á unos 147900000 km del Sol, la luz solar tarda unos 492 segundos en llegar á la Tierra. ¿Cuántos kilómetros camina aproximadamente esa luz por segundo?

Observaciones.—Por los problemas que preceden puede formarse ideas de la cantidad enorme de problemas prácticos que el conocimiento de la aritmética permite resolver. Habrá lugar de ejercitarse á resolver rápidamente las longitudes. Si se sabe, por ejemplo que la distancia entre los árboies de un camino es de 8 metros, bastará contar los árboles y multiplicar la cifra hallada por 8, para tener la distancia del camino. El número de los escalones de una escalera, puede permitir, conociendo la altura de un escalón, calcular la altura de una escalera. El número de pasos puede permitir el cálculo aproximado de uua distancia, conociendo la longitud de un paso, etc. Por el sonido se puede calcular una distancia, si se conoce su velocidad, lo mismo que ha podido calcularse la velocidad del sonido efectuando experiencias en que la distancia entre dos puntos era conocida.

Conviene ejercitarse á efectuar cálculos de medidas de longitudes, conociendo, por ejemplo, la longitud de la mano, del brazo, del paso propio, la altura de una hilada de ladrillos, de un escalón, la distancia entre dos árboles, etc. Podrá utilizarse para estos cálculos los juegos y los paseos. Los alumnos deberán ejercitarse á plantear por sí mismos problemas de adición, de sustracción, de multiplicación y de división de las longitudes y problemas en que se combinen las diversas operaciones.

VI

Medidas de superficies. — Numeración

Enumerar las medidas de superficies.

En un metro cuadrado ¿cuántos decímetros cuadrados hay? centímetros? milímetros cuadrados?

En un miriámetro cuadrado ¿cuántos kilómetros cuadrados hay? hectómetros? decámetros? metros? decímetros? centímetros? milímetros? hectáreas? áreas cuadradas?

En un kilómetro cuadrado ¿cuántas hectáreas hay? áreas? kectómetros cuadrados? decámetros? metros? decímetros? centímetros? milímetros cuadrados?

En una hectárea ¿cuántas áreas hay? hectómetros cuadrados? metros? decímetros? centímetros? milímetros cuadrados?

En el decámetro cuadrado ¿cuántas áreas hay? metros? decímetros cuadrados?

Etc., etc.

Tomando como unidad el miriámetro cuadrado ¿cómo se llamarán los décimos de miriámetro cuadrado? los centésimos? etc.?

Tomando como unidad el kilómetro cuadrado ¿cómo se llamarán los décimos de kilómetro cuadrado? los centésimos? etc.?

Etc., etc.

Cuando se cambia la coma uno, dos, tres lugares, etcétera, hacia la derecha ¿en qué se convierten las diferentes unidades de superficie?

Cuando se cambia la coma uno, dos, tres lugares, etcétera, hacia la izquierda ¿en qué se convierten las diferentes unidades de superficie?

¿Qué sucede cuando en unidades de superficie se cambia la coma dos, cuatro, seis, etc. lugares hacia la derecha? hacia la izquierda?

Enunciar medidas de superficie y hacerlas escribir.

Escribir medidas de superficie y hacerlas leer.

Tomar un metro recto, un metro doblado, una cadena de agrimensor, un doble decímetro y hacer que se midan superficies (paredes, campos, patios, pliegos de papel, tablas, etc., etc.

Encargar á los alumnos que tomen medidas; unos midiendo, otros tomando notas, otros calculando, otros verificando los cálculos.

VII

Medidas de superficie. — Adición y sustracción

Una casa ocupa una superficie de 324 m², 27 dm². Un jardín alrededor de la casa ocupa una superficie de 23 decámetros cuadrados, 5 metros cuadrados; un terreno cultivado detrás de la casa ocupa una superficie de 15 hectáreas, y un terreno inculto que está á continuación ocupa una superficie de 7 áreas. ¿Cuál es la superficie total ocupada por la casa, el jardín y el terreno?

Si se separa de esa superficie la de la casa y del jardín, ¿cuánto queda?

Medir superficies (paredes, tablas, pizarras, pliegos de papel, terrenos, etc., etc.) Adicionarlos. Sustraer. Indicar que la Geometría permite calcular las superficies y que por el momento se ocupa sólo de las superficies rectangulares.

Demostrar que, por ejemplo, una diagonal divide un rectángulo en dos triángulos iguales, y que la superficie de uno de ellos es igual á la mitad de la del rectángulo.

Medir aproximadamete superficies irregulares refiriéndolas á rectángulos á los cuales se añade ó de los cuales se separan triángulos.

VIII

Medida de superficie.—Multiplicación y división

Se ha embaldosado una cocina empleando baldosas de forma cuadrada que miden 24 centímetros de lado. En este trabajo han entrado 125 baldosas. ¿Cuál es la superficie embaldosada?

Se ha embaldosado una antecámara de 4m²,50 empleando baldosas del mismo tamaño. ¿Cuántas baldosas han entrado?

Se han puesto cortinas á 16 ventanas. La dimensión de cada media ventana es 1m,70 de alto y 0m,45 de ancho. ¿Qué superficie se habrá cubierto con las cortinas?

Se quieren plantar patatas en la cuarta parte de un campo que tiene una superficie de 29 áreas. Las patatas se plantan en quincunces y á 0m,40 de distancia, de manera que han de ponerse, por ejemplo, 2 patatas menos sobre cada hilera par. ¿Cuántas patatas se necesitarán para sembrar la cuarta parte de las 29 áreas? Dígase en m² la superficie que se habrá puesto en cultivo. ¿Cuál será la superficie comprendida entre dos hileras?

En la misma superficie puesta en cultivo, si se sembraran alubias en grupos distantes entre sí 0m,25 y colocadas también en quincunces, ¿cuántas alubias se necesitan si se quieren sembrar 6 alubias para cada grupo? ¿Cuál será la superficie comprendida entre dos hileras de grupos? ¿Qué superficie se necesitará si se quiere trazar una vereda de 0m,40 de ancho cada 15 metros?

43 trabajadores tienen que labrar 89 hectáreas y 7 centiáreas de terreno. Desean también repartirse el trabajo. ¿Cuántos m² deberá labrar cada uno?

Un territorio se halla comprendido entre cuatro caminos que se cortan en ángulos rectos. Los caminos están bordeados de árboles distantes entre sí 7m,50. Los dos caminos que van de Norte á Sur tienen cada uno 36 árboles; los otros dos que van de Este á Oeste tienen cada uno 48 árboles. Calcúlese la superficie del terreno en hectáreas y áreas.

Un tapiz tiene 2m,15 de ancho y 3m,45 de largo, se trata de doblarle con una tela que tiene 1m,15 de ancho. ¿Cuántos metros de esta tela se necesitarán?

Ocho habitaciones tienen cada una 4m,20 de ancho, 5m,35 de largo y 3m,12 de alto; tienen además cada una dos ventanas de 1m,65 de alto por 98 centímetros de ancho; una puerta de 2m,24 de alto por 1m,26 de ancho, y una chimenea de 1m,44 por 1m,37. Se quieren pintar las paredes de estas 8 habitaciones. ¿Qué superficie es la que se ha de pintar?

Observación.—Los problemas que hemos indicado á propósito de las superficies podrán servir de tipos, y los alumnos deberán ejercitarse por sí mismos en plantear y resolver problemas de cálculos de superficies.

Conviene hacerles apreciar la superficie de una pared por las dimensiones y el número de ladrillos de cada hilada y por el número de hiladas; que aprecien la superficie de un movimiento por el cálculo de una hilera de tablas y del número de las hileras, etc.; la superficie de una pared midiendo las dimensiones de un dibujo que se repite; la superficie de un campo por el número de semillas en él depositadas, conociendo la distancia entre las semillas, etc., etcétera. Los paseos y los juegos pueden ser también utilizados para ejercicios de medidas de superficies.

El profesor explicará á los alumnos más adelantados qué se entiende por perpendicular, paralela, ángulo recto, paralelógramo, rectángulo, triángulo, trapecio, círculo, etc.; después les dará las principales reglas siguientes, que permiten calcular las superficies imaginarias, ó, lo que es preferible, superficies reales medidas.

La *superficie de un paralelógramo* — (un paralelógramo es una figura plana comprendida entre 4 líneas rectas paralelas 2 á 2) — es igual al producto de uno de sus lados por la perpendicular que mide la distancia de este lado al lado opuesto. Imagínense ó mídanse paralelógramos y calcúlense sus superficies.

La *superficie de un rectángulo* se mide de la misma manera — (por ser un rectángulo un paralelógramo cuyos ángulos son rectos). — Puede decirse también (siendo los lados perpendiculares 2 á 2) que la superficie del rectángulo es igual al producto de su base por su altura. Imagínense ó mídanse rectángulos y calcúlense sus superficies.

La *superficie de un cuadrado* — (un cuadrado es un rectángulo que tiene todos los lados iguales).—La superficie del cuadrado es igual al número que expresa la longitud de un lado multiplicado por sí mismo. Imagínanse ó mídanse cuadrados y calcúlense sus superficies.

La *superficie de un trapecio* es igual al producto de la semi-suma de sus bases por su altura, ó también al producto de su altura por la recta que une los medios de los lados no paralelos. Imagínense ó mídanse trapecios y calcúlense sus superficies.

La *superficie del círculo* es igual á 3,1416 multiplicado por el cuadrado delr adio. Imagínense ó mídanse radios de círculos y calcúlese la superficie de los círculos.

Se halla la *superfic e de un polígono cualquiera* — (un polígono es una figura plana cerrada por líneas rectas (lados) en número indeterminado) — trazando líneas que dividen el polígono en triángulos, calculando después la suma de las superficies de esos triángulos. Imagínense ó mídanse polígonos y mídanse sus superficies.

IX

Medidas de volumen. — Numeración

Enumerar las medidas de volumen.

¿Cuántos decímetros, centímetros y milímetros cúbicos hay en un metro cúbico?

¿Cuántos centímetros y milímetros cúbicos hay en un decímetro cúbico?

¿Cuantos milímetros cúbicos hay en el centímetro cúbico?

Tomando el metro como unidad, ¿cómo se llamarán los décimos, los centésimos y los milésimos de metro cúbico?

Tomando el decímetro cúbico como unidad, ¿cómo se llamarán los décimos, centésimos y milésimos? etcétera.

Tomando el centímetro cúbico como unidad, ¿cómo se llamarán los décimos, los centésimos? etc.

Tomando el milímetro cúbico como unidad, ¿cómo se llamarán los décimos, los centésimos? etc.

Cuando se cambia la coma uno, dos, ó tres, ó etc. lugares hacia la derecha, ¿en qué se convierten las diferentes unidades de volumen?

Cuando se cambia la coma uno, dos, ó tres, ó etc. lugares hacia la izquierda, ¿en qué se convierten las diferentes unidades de volumen?

¿Qué sucede cuando respecto de las unidades de volumen se cambia la coma tres, seis, nueve lugares hacia la derecha? hacia la izquierda?

Enumerar las medidas de capacidad.

¿El litro, el hectólitro, el decálitro y el decílitro cuánto valen en metros cúbicos? en decímetros cúbicos?

¿Cuántos decálitros, litros, decílitros y centílitros vale el hectólitro?

¿Cuántos litros, decílitros y centílitros vale el decálitro?

¿Cuántos decílitros y centílitros vale el litro?

Etc., etc.

Tomando el decálitro como unidad, ¿cómo se llamarán las unidades 10 veces mayores? la 10, 100, 1000 menores?

Cuando se cambia la coma uno, dos ó tres lugares hacia la derecha, ¿en qué se convierten las diferentes unidades de capacidad?

Cuando se cambia la coma uno, dos ó tres lugares hacia la izquierda, ¿en qué se convierten las diferentes unidades de capacidad?

Enunciar medidas de volumen y de capacidad y hacerlas escribir.

Escribir medidas de volumen y capacidad y hacerlas leer.

Hacer que se calculen medidas de volumen por medio de dimensiones tomadas por los alumnos sobre los objetos.

X

Medidas de volumen, capacidad.

Adición, Sustracción, Multiplicación, División

¿Cuál es el volumen total ocupado por seis piedras de sillería cuya longitud, ancho y altura se mide?

¿Cuál es el volumen ocupado por una ó varias cajas, libros, etc., que se mide?

¿Cuál es la capacidad de una habitación de plano rectangular cuya longitud, ancho y altura se mide?

¿Cuál es la capacidad de una habitación rectangular cuyas dimensiones se miden, deduciendo, por ejemplo, el volumen de un armario?

Cada individuo respira una cantidad de aire que varía según su constitución, su edad, el trabajo efectuado, la disposición del momento, etc. Por término medio un individuo aspira á la vez unos 300 cm³ de aire, y hace 18 aspiraciones por minuto. ¿Cuánto aire habrá penetrado en su pecho en 24 horas? en una semana? en un mes de 28 días? en un mes de 29 días? de 30 días? de 31 días? en 1 año? en 60 años? Evaluar esas cantidades en litros, después en m³.

Todo ese aire no se utiliza. Se ha evaluado en unos 21 litros por hora la cantidad de oxígeno consumido por un individuo. ¿Qué cantidad consumirá por término medio en un año? Evaluar esa cantidad en litros, en gramos, en m³.

Diversos higienistas han calculado, aproximadamente y con variaciones bastante grandes según las apreciaciones, que una cantidad de aire lo menos de 10 m³ era necesaria por hora y por persona por término medio. Sobre este dato, medir la capacidad de diferentes habitaciones y ver si el volumen de aire que contienen es suficiente para las personas y durante el tiempo que en ellas estacionan. Determinar cuántas veces al día conviene renovar el aire abriendo las ventanas. (Cuanto más pequeña es una habitación conviene abrir con más frecuencia las ventanas).

En una clase que contiene cierto número de alumnos y ciertas dimensiones, ¿se puede sin inconveniente permanecer una hora y media sin renovar el aire?

Se ha calculado que unos 20000 litros de sangre atraviesan los pulmones en 24 horas, y 130 litros los riñones. ¿Qué cantidad de sangre aproximadamente habrá atravesado esos órganos en un individuo que haya vivido 58 años? Dar la cifra en m^3.

Hacer que los alumnos caven un hoyo bastante grande y cuadrado lo mejor que puedan. Hacerle medir. Dado el tiempo empleado (en horas) y la capacidad del hoyo, calcular cuántas horas necesitarían esos alumnos para cavar una zanja de una anchura, de una profundidad y de una longitud dadas.

La cubierta de una cómoda es un trozo de mármol de 23 milímetros de grueso, de 4dm,8 de ancho y de 87 cm de largo. ¿Cuál es el volumen de ese trozo de mármol?

Sumergido ese trozo de mármol en un tonel completamente lleno de agua, hará desbordar el tonel. ¿Cuántos litros de agua saldrán de él?

Medir el volumen de una pared de ladrillos. Medir el volumen de un ladrillo y calcular después el número de ladrillos que serían necesarios para construir una pared igual. Luego para construir una pared la mitad más baja y más corta.

Medir una caja. Medir unas cajitas y calcular cuántas cajitas podrían ponerse en la caja.

En tiempo lluvioso, poner un recipiente rectangular lo mayor posible. Calcular, según la altura del agua en el recipiente después de la lluvia, el volumen de agua caída sobre el centímetro cuadrado ó sobre una superficie dada.

Una paloma consume diariamente unos tres y medio puñados de grano (contando con cierto desperdicio). Medir el número de puñados que contiene un litro y calcular cuántos se necesitan para alimentar 8 pares de palomos durante una semana.

La trilla de una gabilla de trigo produce unos tres y medio litros de grano. Si se trillan 2594 gabillas, ¿cuántos sacos de un hectólitro y medio podrán llenarse? ¿Quedará una resta?

Se quiere construir un estanque rectangular con una longitud y anchura dadas para contener determinada cantidad de agua. Calcúlese la altura que deberá tener.

Hacer que los alumnos midan durante una decena de días frescos la cantidad de líquido que beba cada uno de ellos, y que hagan lo mismo durante una decena de días calurosos. Calcular la diferencia de consumo de líquido entre los días calurosos y los días frescos. Siendo, por supuesto, el ejercicio normal.

Observación.—Los ejemplos que preceden demostrarán que es fácil efectuar *ejercicios* prácticos de medidas. Estos ejercicios pueden variarse al infinito y servir para mostrar sobre todo que es posible determinar las necesidades normales de un individuo. Cada uno deberá habituarse á *medir sus necesidades,* lo que le permitirá darse cuenta de los movimientos que ha de realizar para satisfacerlos. Habrá lugar de ejercitar los alumnos á que planteen problemas por sí mismos.

El profesor explicará á los alumnos más adelantados lo que se entiende por paralelepípedo, prisma, pirámide, cilindro, cono, esfera, etc.; después les dará las principales reglas siguientes, que permiten calcular los volúmenes usuales y hará que calculen volúmenes imaginarios, ó, lo que es preferible, volúmenes reales medidos.

El *volumen de un paralelepípedo* es igual al producto de la superficie de su base por su altura. Imagínense ó mídanse paralelepípedos y calcúlense sus volúmenes.

El *volumen de un prisma* es igual al producto de la superficie de su base por su altura. Imagínense ó mídanse prismas y calcúlense sus volúmenes.

El *volumen de una pirámide* es igual al producto de la superficie de su base por la tercera parte de su altura. Imagínense ó mídanse pirámides y calcúlense sus volúmenes.

El *volumen de un cono* es igual al producto de la superficie de su base por la tercera parte de su altura. Imagínense ó mídanse conos y calcúlense sus volúmenes.

La *superficie de la esfera* es igual á $4 \times 3{,}1416 \times$ el cuadrado del radio. El volumen de la esfera se obtiene multiplicando la superficie por la tercera parte del radio. Imagínense ó mídanse esferas y calcúlense sus volúmenes.

El *volumen del cilindro* es igual al producto de su base por su altura. Imagínense ó mídanse cilindros y calcúlense sus volúmenes.

Calcúlese la superficie convexa desarrollada de un cilindro. Demuéstrese que equivale á la de un rectángulo.

XI

Medidas de peso.—Numeración

Enumerar la medida de peso.

¿Cuántos kilogramos, hectogramos, decagramos, gramos, decigramos, centigramos y miligramos contiene la tonelada?

¿Cuántos m^3 (ó submúltiplos de m^3) de agua destilada á 4 grados centígrados contienen esas diferentes unidades?

¿Cuántos hectogramos, decagramos, etc., contiene el kilogramo?

¿Cuántos decagramos, gramos, etc., contiene el hectogramo?

Etc., etc.

Tomando la tonelada como unidad, ¿cómo se llamarán los décimos, los centésimos, los milésimos, etc.?

Tomando el kilogramo como unidad, ¿cómo se llamarán los décimos, los centésimos, etc.?

Etc., etc.

Cuando se cambia la coma uno, dos ó tres lugares hacia la derecha, ¿en qué se convierten las diferentes unidades de peso?

Cuando se cambia la coma uno, dos ó tres lugares hacia la izquierda, ¿en qué se convierten las diferentes unidades de peso?

Tomando el miligramo como unidad, ¿cómo se llamarían las unidades 10, 100, 1000, etc., veces mayores?

Tomando el centigramo como unidad, ¿cómo se llamarían las unidades 10, 100, 1000, etc., veces mayores?

Etc., etc.

Enunciar medidas de peso y hacerlas escribir.

Escribir medidas de peso y hacerlas leer.

Hacer que los alumnos efectúen en diferentes balanzas pesadas variadas, que las comprueben y las anoten.

XII

Medidas de peso.—Adición.—Sustracción Multiplicación y División

Se llama *peso neto* el peso de los objetos, exceptuado el de lo que les envuelve ó de lo que se les mezcla. Se llama *peso bruto* el peso de objetos embalados ó de los objetos mezclados. Se hace un paquete de ropa en el que entran 24Kg516 de vestidos; 968 gramos de papel; 473 gramos de bramante; una etiqueta que pesa 7 gramos, y 4 gramos de engrudo. ¿Cuál es el peso bruto del paquete?

Se hace un paquete de alubias. Para pesarle se pone en la balanza un peso de 5 Kg, uno de 500 gr, uno de 50 g, uno de 20 g y uno de 2 g. ¿Cuál es el peso del paquete?

El amigo que recibe el paquete, le deshace, siembra las alubias, y ve que resta en el paquete tierra y restos que estaban mezclados con las alubias. Pesa aquella tierra y aquellos restos y ve que pesan 849 gramos. Pesa después todo el embalaje, y ve que resultan 935 gramos. ¿Cuál era el peso neto de las alubias?

Se cargan en un barco 368 cajas de pasas. Cada una de esas cajas contiene 12 cajitas que pesan en bruto 43Kg,9 dg. Cada caja vacía pesa aproximadamente 1 Kg $^1/_2$. ¿Qué peso se ha embarcado?

¿Cuánto pesan en París 63¹,4 de agua destilada á 4° centígrados?

Una vasija llena de agua pesa 15Kg,7. Se sabe que el peso del vaso es 1K,188. ¿Cuál es el peso del agua?

Para hacer jalea de manzanas es preciso mondar las manzanas, retirar la parte central que contienen las pepitas, cocerlas, exprimir el jugo y pesarlas. En este momento se pone en una vasija de cobre azúcar y se cuece hasta que toma aspecto perlado. Después, para cada peso de 75 g. de azúcar se pone 1 Kg de jugo de manzanas, y se deja cocer el todo hasta que una cucharada de mezcla puesta sobre unplato parezca goma líquida. Se tiene jugo de manzanas cocido en una vasija que pesa en bruto 7Kg,800. La vasija vacía pesa 800 g. ¿Cuánto azúcar habrá de ponerse á cocer para hacer jalea de manzanas?

Se puede añadir á esta jalea, en el momento que se hace cocer el jugo de las manzanas con el azúcar, el jugo y la bizna de un limón. La jalea de naranja se fabrica de la misma manera, con la única diferencia que se exprime el jugo de las naranjas para echarle en el azúcar perlado. Hacer que pesen los niños las naranjas, hacerles calcular el desperdicio (cáscara, pepitas y pulpa), hacerles pesar el jugo (peso bruto con el recipiente, peso neto del jugo), hacerles calcular el peso del azúcar. Hecha la jalea, pesar los potes que la contienen (peso bruto, peso neto). Hacer que calculen el desperdicio debido á la cocción y al trasiego.—Respecto de la jalea de manzanas, queda, después que se han cocido las manzanas y exprimido el jugo, con qué hacer la marmelada de manzanas. Calcular el peso de la mermelada, etc.

Lo que precede es un ejemplo que demuestra que la experiencia en materia de cocina depende mucho de las pesadas. Se llama *tasa* la diferencia entre el peso bruto y el peso neto. En el ejemplo que queda expuesto, el peso del recipiente sólo sirve para obtener el peso neto del jugo ó de la jalea. Habitúese á los niños á pesar todo y á tarar cuando sea necesario. Como no se fabrica siempre confitura, se puede representar el simulacro de esta fabricación. La arena puede utilizarse para representar el jugo y el azúcar. Pueden tomarse, además, libros de cocina y consultarlos para las proporciones variables de los productos que han de mezclarse. Por ejemplo, según las frutas se pone mayor ó menor cantidad de azúcar.

Se darán problemas sobre la fabricación de pasteles, etc. Los niños como las niñas deben aprender la cocina; es un trabajo razonable. Todos deben también (dicho sea de paso) darse cuenta de la composición química de los alimentos.

Se pesa un litro de garbanzos y se ve que pesa 877 gramos. ¿Cuánto pesarán 46 hectólitros?

Pesar alubias, habas, etc., y hacerse cargo de la relación entre el peso y el volumen; es decir, por ejemplo, cuáles son los pesos respectivos de litros de legumbres diferentes.

¿Cuánto pesa en París un m³ de agua destilada á 4° grados centígrados?

Una vasija de una capacidad de 8 l y 9 centílitros, pesa vacío en París 1Kg,433. ¿Cuánto pesará lleno de agua destilada á 4° centígrados?

Ciertos granos de plomo pesan 125 centigramos. ¿Cuántos entrarán en una tonelada?

Si se han empleado 187 Kg de trigo para sembrar una hectárea, ¿qué extensión se podrá sembrar con 62 Kg? ¿Qué peso de trigo se necesitará para sembrar 18 áreas?

XIII

Densidad.—Volumen específico

El platino, á volumen igual, pesando unas 23 veces más que el agua, ¿cuánto pesaría un bloque de platino de 15 dm^3?

A volumen igual, la plata es 10,474 veces más pesada que el agua. Evaluar el volumen de dos lámparas de plata que pesan en junto 3Kg,692?

El oro, á volumen igual, pesa 19,258 veces más que el agua, ¿cuál es el peso de un trozo de oro que se ha sumergido en un vaso lleno de agua y que ha hecho desbordar 75 dm^3 de agua?

El cobre rojo fundido pesa 8,788 veces más que el agua; el hierro fundido 7,207; el zinc 6,861; el aluminio fundido 2,56; el cristal unos 2,5. Evaluar el volumen de objetos de cobre rojo, de hierro, de zinc, de aluminio, de cristal, pesándolos.

Así mismo, conociendo los pesos específicos de los líquidos, es decir, el peso de los líquidos á 0° comparativamente al del agua destilada y á 4° centígrados tomados por unidad, se puede calcular, por ejemplo, el peso de un volumen cualquiera, de un líquido cualquiera sin pesarlo. Sabiendo, por ejemplo, que el mercurio es 13,596 veces más pesado que el agua, calcular el peso de 2 $^1/_2$ litros de mercurio.

Tomar de un volumen de física las tablas de los pesos específicos de los sólidos y de los líquidos, y hacer ejercicios del género de los anteriormente indicados.

Tómense unos objetos, de los que, conociendo su peso y su volumen, se determinará su densidad; conociendo su volumen y su densidad, se determinará su peso; conociendo su peso y su densidad, se determinará su volumen.

Determinar el volumen específico de un cuerpo.

XIV

Medidas de valor.—Numeración

Enumerar las medidas de valor.

Cuando se cambia la coma uno, dos ó tres lugares hacia la derecha, ¿en qué se convierten las diferentes unidades de moneda?

Cuando se cambia la coma uno, dos ó tres lugares hacia la izquierda, ¿en qué se convierten las diferentes unidades de moneda?

En la sociedad actual, las substancias circulan de manera que llegan, no á los que tienen necesidad de ellas, sino á los que pueden pagar. Los que no tienen el medio de pagar han de privarse de una gran cantidad de productos. Tomar catálogos de almacenes, enunciar precios de productos los cuales debieran ser asequibles á todos y hacer escribir esos precios.

Escribir precios de productos de ese género y hacerlos leer.

Mostrar piezas de moneda y contar cantidades.

Enunciar cantidades y hacerlas contar en piezas de moneda.

Explicar á los alumnos que los hombres se disputan por esas monedas.

Hacer que los alumnos hagan lecciones y que den explicaciones verbales acerca del cambio, del valor, etc., etc.

XV

Medidas de valor.—Adición—Sustracción Multiplicación.—División

Para resolver fácilmente la mayor parte de los problemas concernientes á la medida de valor, es interesante conocer la teoría de las reglas de tres, de la reducción á la unidad, de la proporcionalidad, etc. No daremos, pues, en el presente párrafo más que ejercicios sencillos, reservando para párrafos ulteriores los ejercicios que podrían parecer más complicados y que se efectuarán sin dificultad cuando se conozcan las teorías mencionadas.

Los alumnos deberán habituarse á clasificar los problemas y á plantear por sí mismos problemas de dinero concernientes á longitudes, superficies, volúmenes, pesos, etc. Se tratará también de preguntar á los alumnos acerca de la concurrencia, de la organización social actual y de asegurarse que han comprendido bien el absurdo de la concepción del cambio y de valor, y la necesidad de la circulación fraternal de la substancia entre los hombres, si se quiere organizar una sociedad razonable.

Tomar diferentes catálogos, por ejemplo, de almacenes de novedades, y servirse de ellos para hacer los ejercicios siguientes:

Medir el bajo de una falda y calcular el precio de compra de un galón, de una cinta, de un encaje para guarnecerlo.

Para el estudio de la aritmética conviene que cada alumno tenga un metro.

Hacer que los alumnos calculen lo que costaría la compra de galones, cintas ó encajes para todas las niñas de la clase.

Los mismos problemas en el caso en que se pusieran dos ó más guarniciones, ó en que se guarnecieran las mangas y el cuello, etc., etc.

Los mismos problemas para las telas vendidas en pieza. Las niñas harán también problemas concernientes á los vestidos de los niños y éstos á los de las niñas.

Calcular el precio del vestido completo de un niño. El precio. El precio del vestido de niñas y niños de la clase; el de todos los de la escuela.

Pedir á los alumnos que planteen problemas en que se trate de adivinar, sustraer, multiplicar y dividir precios de longitudes.

Lo mismo para las superficies, los volúmenes, los pesos, las relaciones de los pesos y de los valores, etc. He aquí algunos ejemplos:

Si con 90 kilogramos de guano, comprado á 29,25 pesetas los 100 kilog., mezclados á 110 kilog. de yeso comprados á 16 pesetas la tonelada, hay para abonar la mitad de una hectárea, ¿cuánto costaría abonar una hectárea? ¿un área? ¿9 hectáreas? ¿23 áreas? etc.?

Se quiere conducir agua á una casa. Para ello se necesita cavar una zanja de 70 centímetros de profundidad, de 55 centímetros de ancho y de 37 metros de largo. Suponiendo que el trabajo de cavar y terraplenar se paga á tanto el m^3, ¿cuánto costará la zanja? ¿cuánto costaría si el precio por m^3 fuera solamente....?

En la actual sociedad de concurrencia, los hombres hacen pagar casi todo. No sería extraño que un día se pusiera un impuesto sobre el aire que se respira. Suponiendo que una cantidad de aire de unos 10 m^3 es necesaria por hora y por persona, ¿cuánto pagaría anualmente un individuo al Estado si se le exigiese un céntimo por tonelada de aire consumido?

Dado que la población de España es de unos 17 millones de habitantes, ¿cuánto produciría semejante impuesto al Estado?

Hacer que los niños calculen el coste de su alimentación. Lo que cuesta en la sociedad actual la vida de los niños de una clase, los de toda la escuela durante un día, una semana, un mes, un año. Lo que costaría la vida de tantos más, de tantos menos.

Tomar una balanza y suponer que faltan las pesas y se quiere pesar. Fabricar pesas de la manera siguiente: se toma un trapo y un bramante y se ponen sobre un platillo; en el otro se ponen una ó varias monedas cuyo peso se conoce. Sobre el trapo se pone arena ó chinas hasta obtener un peso conocido. Se recoge el trapo con la arena ó chinas y se ata con el bramante formando un saquito sobre el cual se inscribe el peso. De la misma manera se fabricará cierto número de pesas que servirán para fabricar pesas mayores.

Por ese medio se fabricarán pesas que permitan pesar cualquier objeto usual.

En lugar de tomar enunciados de problemas de los libros, procurarse precios corrientes de mercancías y suponer que se quieren construir paredes, por ejemplo. Calcular el precio de los ladrillos, de las piedras, de la arena, de la cal, de la mano de obra, etc., etc.

Calcular lo que en la sociedad actual cuesta amueblar una casa para una familia (muebles, vajilla, etc., etc.)

Sabiendo que las monedas de plata tienen el título de 0‘835 calcular el peso de plata que hay en 1000 pesetas en plata. Ver lo que vale la plata en el curso del día y calcular sobre ese curso lo que vale realmente ese peso de plata al que se atribuye un valor arbitrario de 1000 pesetas. Demostrar que todo eso es convencional y hacer que se comprenda que todos los ejercicios sobre el dinero deben servir sobre todo para evidenciar como en una sociedad de fraternidad, suprimiendo el uso de la moneda, se evitarían movimientos inútiles, disputas, etc., y qué alegría resultaría para individuos razonables interesarse por el bienestar ajeno sin preocupación mercantil.

Demostrar que la ganancia no puede existir sin detrimento del prójimo y que el que más gana es el que más explota. Con esta idea, que ha de destruirse en una sociedad razonable, están llenos los libros de aritmética que se ponen en manos de los niños. Demostrar con ejemplos que para establecer una ganancia es preciso calcular un *precio de coste,* un *precio de venta* y hacer una sustracción. La diferencia es la *ganancia* ó la *pérdida*. Calcular ganancias y pérdidas.

Si se quiere hacer que intervengan multiplicaciones en los problemas, se puede, conociendo, por ejemplo, el jornal diario de un obrero, calcular el jornal semanal de cierto número de obreros, etc. Cuantos más obreros tiene un patrón, más probabilidades tiene de alcanzar una gran fortuna con el trabajo ajeno. En una sociedad razonable no habrá patronos ni obreros, sino compañeros, que lo serán todos los que viviendo juntos sobre la tierra tienen interés en suprimir la concurrencia entre sí y en reemplazarla por la alegría del compañerismo.

XVI

Medida del tiempo y del círculo.—Numeración

Enumerar las unidades de tiempo.

¿Cuántos años tiene el siglo?

¿Cuántos meses, semanas, días, horas, minutos y segundos tiene el año?

¿Cuántos días, semanas, horas, etc., contiene un mes de 28, 29, 30 ó 31 días?

¿Cuántas horas, minutos y segundos tiene un día?

¿Cuántos minutos y segundos tiene una hora?

¿Cuántos grados, minutos y segundos tiene el círculo?

¿Cuántos minutos y segundos tiene el grado?

Dictar medidas de tiempo y de círculo y hacer que los alumnos las escriban.

Escribir medidas de tiempo y de círculo y hacerlas leer.

XVII

Medida del tiempo y del círculo.—Adición, Sustracción, Multiplicación, División

Preguntar á los niños su edad y hacerles calcular esta edad en meses, en horas, en minutos y en segundos.

Hacerles medir por medio de un transportador los tres ángulos de un triángulo, hacer que sumen las tres cifras halladas y demostrar que la suma es igual á 180°, es decir, á la suma de dos ángulos rectos (de 90°).

Hacer que midan por medio de un transportador los cuatro ángulos de un cuadrilátero y demostrar que esta suma es igual á 360°. Etc.

Hacer que midan dos ángulos de un triángulo y calcular el tercero.

Hacer medir tres ángulos de un cuadrilátero y calcular el cuarto.

Suponiendo que un individuo durante su vida ha respirado 18 veces por minuto y que ha muerto á 98 años, 2 meses, 7 días, 14 horas, 36 minutos y 53 segundos, ¿cuántas veces ha respirado durante su vida?

Hacer que copien los alumnos una ó varias páginas de un libro, anotando el tiempo empleado en ese trabajo y hacerles apreciar el tiempo que emplearían para copiar el libro entero entre dos, tres, cuatro, etcétera, etc.

Demostrar á los niños con ejemplos que cuando se dedican muchos á un mismo trabajo, el trabajo de cada uno se hace poco importante. Hacer que calculen cuantos días, horas, minutos ó segundos necesitaría un solo individuo para hacer cierto trabajo dedicándole, por ejemplo, nueve horas diarias ó más. Hacer que calculen á continuación cuánto tiempo trabajaría cada individuo si á ese trabajo se dedicasen varios, ó muchos ó muchísimos trabajando poco tiempo cada uno.

Todos los niños deberían tener reloj. El reloj es un instrumento científico. Habituar á los niños á calcular la distancia que recorren á pie en cierto tiempo, la que recorren en tranvía, en ferrocarril, en barco, en bicicleta, etc., de manera que les permita apreciar el camino recorrido cuando han caminado cierto tiempo, cuando han circulado en diferentes vehículos.

Habituar los niños á imponerse tareas si quieren terminar cierto trabajo en un tiempo determinado.

Anotar la latitud de una ciudad en grados y minutos, y la de otra, calculando después la diferencia.

Un viajero sale de París y cuenta la distancia en grados, minutos y segundos, á partir de aquel meridiano. Recorre durante una primera etapa 7° 13′ 48″ de longitud; durante la segunda etapa 12° 6′ 2″, durante la tercera etapa $9^{\circ}\ 25'\ 14''$, ¿á qué distancia se halla en aquel momento del meridiano de París? ¿En qué etapa ha recorrido mayor distancia? ¿Cuánto ha recorrido más en esta etapa que en las otras?

Se traza alrededor de un punto 9 ángulos consecutivos de $4^{\circ}\ 26'\ 15''$. ¿Cuál es el grandor del ángulo restante?

Se quiere dividir un ángulo de $55^{\circ}\ 20'\ 15''$ en 5 ángulos iguales. Calcular el grandor de cada uno de estos ángulos.

TERCERA PARTE

—Divisibilidad, potencias, raíces, fracciones.
—Cálculo mental é instrumentos de cálculo.

Aunque el cálculo mental se mencione por primera vez en esta tercera parte, conviene que, desde el principio del estudio de la aritmética, tomen los niños la costumbre de calcular mentalmente.

En lo concerniente á los instrumentos de cálculo, nos limitaremos á indicarlos aquí. Pueden ser en otra parte objeto de un estudio especial.

TERCERA PARTE

Divisibilidad, potencias, raíces, fracciones. Cálculo mental é instrumentos de cálculo.

Divisibilidad

Hemos visto que pueden presentarse dos casos cuando se divide un número por otro: ó la operación resulta exacta, ó queda una resta. En el primer caso se ha dicho que el primer número es divisible exactamente por el segundo, ó, por abreviación, que es *divisible* por el segundo.

La división es una operación corriente, cuya importancia hemos comprendido (puesto que para conocer es preciso medir, y que medir es, en definitiva, dividir). Constantemente hay que dividir unos números por otros números, y, por tanto, es necesario conocer las condiciones en que la división de un número por otro dará una resta nula. Estas condiciones se llaman condiciones de *divisibilidad*.

Se ve inmediatamente que un número divisible por otro es *múltiplo* de ese otro, puesto que sabemos que, cuando la división no da resta, basta multiplicar el divisor por el cociente para encontrar el dividendo. Diremos, pues, que un número dado es múltiplo de otro, si ese otro número multiplicado por un tercer número produce el número dado.

Ejemplo: 15 es divisible por 3, puesto que, si efectúo la división, tendré 5 por cociente y ninguna resta. 15 es múltiplo de 3 y de 5, puesto que, $5 \times 3 = 15$, y que $3 \times 5 = 15$.

Todos los números enteros son divisibles por la unidad

El primer carácter de divisibilidad, común á todos los números enteros, es que, por definición, son todos divisibles por la unidad. Hemos visto, en efecto (numeración), que un número cualquiera se forma añadiendo una unidad al que le precede; de manera que un número entero es siempre una colección de unidades, y sabemos (tabla de multiplicación y división) que un número cualquiera dividido por 1 da por cociente ese número sin resta.

Todos los números son divisibles por sí mismos

Resulta de lo precedente (véase la tabla de multiplicación y de división) que un número cualquiera es divisible por sí mismo, puesto que el cociente de esta división es siempre exactamente 1 y que no hay resta.

Ese es el segundo carácter de divisibilidad común á todos los números.

Cuando otro número no tiene otro divisor que él mismo y la unidad, se le denomina número *primo*.

Dos ó más números pueden tener un *divisor común*, es decir, un número que divida exactamente á cada uno.

Cuando dos ó más números no tienen más divisor común que la unidad, se les denomina *números primos entre sí.*

Tabla de los números primos*

Utilizando los conocimientos recién adquiridos, nos es posible construir una tabla de los números primos, es decir, de los que no son divisibles más que por sí mismos y por la unidad.

Inscribimos primeramente 1, que no es divisible sino por sí mismo; después 2, que no es divisible sino por sí mismo y por la unidad; luego 3, que no es divisible por 2 y que por consiguiente no es divisible sino por sí mismo yp or la unidad. En este momento observamos que á partir de 2 y de 2 en 2 todos los números son llamados pares y divisibles por 2.

Inscribo, pues, 1, 2, 3, después la continuación de los números impares hasta el número en que deseo detener la tabla. Observo que á partir de 3 no es necesario conservar los números de 3 en 3, que son todos divisibles por 3, y borraré esos números de la lista.

1 2 3 5 7 ~~9~~ 11 13 ~~15~~ 17 19
~~21~~ 23 ~~25~~ 27 29 31 ~~33~~ ~~35~~ 37 ~~39~~ 41
43 ~~45~~ 47 ~~49~~ ~~51~~

Del mismo modo, á partir de 5, borraré los números de 5 en 5; á partir de 7, borraré los números de 7 en 7, etc.

Principio general de divisibilidad

Todo número que divide otros números, divide la

---

* Llamada también *Criba de Erastótenes* del nombre de su inventor supuesto.

suma, la diferencia y los múltiplos de esos números.

En efecto, tales sumas, diferencias y productos podrían descomponerse siempre en un cierto número de veces el número, es decir, en múltiplos del número añadidos ó cercenados.

Ejemplos:

$$\begin{array}{rl} 9 \text{ (divisible por 3)} & = 3 + 3 + 3 \\ + \ 12 \text{ (divisible por 3)} & = 3 + 3 + 3 + 3 \\ \hline = 21 \text{ (divisible por 3)} & = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} 15 \text{ (divisible por 5)} & = 5 + 5 + 5 \\ - \ 10 \text{ (divisible por 5)} & = 5 + 5 \\ \hline = \ 5 \text{ (divisible por 5)} & = 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} 6 \text{ (divisible por 2)} & = 2 + 2 + 2 \\ \times \ 2 \text{ (divisible por 2)} & = 2 \\ \hline = 12 \text{ (divisible por 2)} & = 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 \end{array}$$

Estos sencillísimos principios bastan para determinar los caracteres de divisibilidad de un número por 2, 3, 4, 5, 6, etc.

Divisibilidad por 2

Un número es divisible por 2 cuando termina por una cifra par ó por 0.

En efecto, un número terminado por 0 expresa una ó varias decenas. Un número terminado por una cifra expresa una ó varias decenas + unas unidades. La porción de las decenas será siempre divisible por 2, puesto que representa 10 (divisible por 2) ó un múltiplo de 10. Faltará ver si la otra porción del número es divisible por 2, lo que tendrá lugar si esta porción (unidades) es una cifra par.

Divisibilidad por 5

Un número es divisible por 5 *cuando termina por* 5 *ó por* 0.

En efecto, un número terminado por 0 expresa una ó varias decenas. Un número terminado por una cifra expresa una ó varias decenas + unas unidades. La porción de las decenas será siempre divisible por 5, puesto que representará 10 (divisible por 5) ó un múltiplo de 10. Faltará ver si la otra porción del número es divisible por 5, lo que tendrá lugar si esta porción (unidades) es 5.

Divisibilidad por 4

Un número es divisible por 4 *cuando termina por dos ceros ó cuando el número formado por sus decenas y sus unidades es divisible por* 4.

En efecto, un número terminado por dos ceros expresa una ó varias centenas. Un número terminado por una cifra de decenas y de unidades expresará una ó varias centenas (si las hay) + unas decenas y unas unidades. La porción de las centenas será siempre divisible por 4, puesto que representará 100 (divisible por 4) ó un múltiplo de 100. Faltará ver si la otra porción del número, á saber, la porción formada por las decenas y las unidades es divisible por 4.

Divisibilidad por 25

Un número es divisible por 25 *cuando está terminado por dos ceros ó cuando el número formado por sus decenas y sus unidades es divisible por* 25.

Igual demostración que la anterior.

Divisibilidad por 8

Un número es divisible por 8 *cuando termina por tres ceros ó cuando el número formado por sus centenas, sus decenas y sus unidades es divisible por* 8.

En efecto, un número terminado por tres ceros expresa una ó varias centenas. Un número terminado por una cifra de centenas, decenas y unidades expresará uno ó varios miles (si los hay) + unas centenas, decenas y unidades. La porción de los miles será siempre divisible por 8, puesto que representará 1000 (divisible por 8) ó un múltiplo de 1000. Faltará ver si la porción formada por las centenas, decenas y unidades es divisible por 8.

Divisibilidad por 125

Un número es divisible por 125 *cuando está terminado por tres ceros ó cuando el número formado por sus centenas, decenas y unidades es divisible por* 125.

Igual demostración que la anterior.

Divisibilidad por 9

Un número es divisible por 9 *cuando la suma de sus cifras adicionadas sin tener cuenta del lugar que ocupan es divisible por* 9.

La demostración se hace habitualmente del siguiente modo:

1.° La unidad seguida de uno ó de varios ceros es un múltiplo de 9 + 1. En efecto, 10 = 9 + 1; 100 = 99 + 1; etc.

2.° Todo número formado de una cifra seguida de uno ó varios ceros es un múltiplo de 9 + esa cifra. En efecto, $20 = 10 + 10 = 9 + 1 + 9 + 1 =$ dos veces $9 + 2$ veces $1 =$ múltiplo $9 + 2$. Igualmente $30 =$ múltiplo de $9 + 3$, etc.

3.° Por último, todo número es un múltiplo de $9 +$ la suma de sus cifras sin tener cuenta del lugar que ocupan. En efecto, $4237 = 4000 + 200 + 30 + 7$ $=$ múltiplo de $9 + 4 + 2 + 3 + 7$.

Observación. — En la práctica, para conocer anticipadamente la resta de la división de un número por 9, se hace la suma de las cifras rebajando 9 cada vez que se obtiene en el curso de la adición un número superior á 9.

Ejemplo: Para saber si 8576 es divisible por 9, digo: 8 y $5 = 13 - 9 = 4 + 7 = 11 - 9 = 2 + 6$ $= 8$, y concluyo que 8576 no es divisible por 9 y que la resta de la división será 8. En otros términos, $8576 =$ múltiplo de $9 + 8$.

Divisibilidad por 3

Un número es divisible por 3 *cuando la suma de sus cifras, adicionadas sin tener cuenta del lugar que ocupan, es divisible por* 3.

Igual demostración que la anterior. Unicamente que en lugar de 9, se dirá 3 veces 3.

Ejemplo: $10 = 3$ veces $3 + 1 =$ múltiplo de $3 + 1$.

Divisibilidad por 6

Un número es divisible por 6 *cuando es divisible por* 2 *y por* 3.

En efecto, si un número puede descomponerse en grupos de 3 unidades, diré que es divisible por 3. Si reuno 2 á 2 esos grupos de 3 unidades, tendré cierto número de grupos de 6 unidades ó de grupos de 2 veces 3 unidades; y, si el número dado puede descomponerse exactamente en cierto número de grupos de 2 veces 3 unidades ó 6 unidades sin que quede nada, diré que el número, considerado como el conjunto de los grupos, es divisible á la vez por 2 y por 3 ó por 6.

Podrá hacer la misma demostración suponiendo grupos de 3 veces 2 unidades.

Divisibilidad por 11

Un número es divisible por 11 *cuando la diferencia entre la suma de sus cifras de lugar impar (á partir de la derecha) y la suma de sus cifras de lugar par es divisible por* 11.

En efecto, 1.° Las unidades de lugar impar (1, 100, 1000, etc.) son múltiplos de 11 + 1 (la resta de cuya división por 11 es 1).

De donde se sigue que un número formado de una cifra de lugar impar, seguido de un número par de ceros, es un múltiplo de 11 + esa cifra. Por ejemplo, 200 = 100 + 100 = múltiplo de 11 + 1 + múltiplo de 11 + 1 = múltiplo de 11 + 2.

2.° Por otra parte, las unidades de lugar par (10, 1000, 100000, etc.) son múltiplos de 11 — 2 (la resta de cuya división por 11 es 10).

De donde se sigue que un número formado de una cifra de lugar par, seguido de un número impar de ceros es un múltiplo de 11 — esa cifra. Por ejemplo, 20 = 10 + 10 = múltiplo de 11 — 1 + múltiplo de 11 — 1 = múltiplo de 11 — 2.

3.° Por consiguiente, un número es un múltiplo de 11, más la suma de sus cifras de lugar impar (á partir de la derecha) menos la suma de sus cifras de lugar par.

Divisibilidad por 7

Los caracteres de divisibilidad por 7 son bastante complicados. Enunciaremos solamente aquí, sin demostración, la regla de divisibilidad por 7 cuando un número tiene 4 cifras ó más.

Cuando un número tiene 4 *cifras ó más, es divisible por* 7, *si, después de haber sido dividido de derecha á izquierda en grupos de tres cifras, la diferencia entre las sumas de las cifras pertenecientes á los grupos de lugar par y la suma de las cifras que pertenecen á los grupos de lugar impar, es divisible por* 7.

Ejemplo: 121854312 es divisible por 7, porque adicionando las cifras del primero y del tercer grupo ($3 + 1 + 2 + 1 + 2 + 1 = 10$) y rebajando esta suma de la de las cifras del segundo grupo ($8 + 5 + 4 = 17$) se obtiene una diferencia = á 7, que es divisible por 7.

Efectuando la división se verá que 121854312 es divisible por 7.

Divisibilidad por 10

Sabemos ya que *un número es divisible por* 10 *cuando termina en cero.*

Utilización de los caracteres de divisibilidad de los números. Prueba por 9

La teoría de la divisibilidad de los números tiene muchas aplicaciones. Veremos después su gran utilidad cuando se trata, por ejemplo, de simplificar las fracciones.

Señalaremos aquí una utilización constante de la divisibilidad por 9 para hacer rápidamente la prueba de la multiplicación y de la división.

Esta prueba se establece sobre el principio siguiente:

Sean dos números. Los divido cada uno por un tercero y obtengo dos restas. El producto de los dos números divididos por el tercero dará la misma resta que el producto de las restas dividido por ese mismo tercero.

Apliquemos este principio tomando 9 por tercer número, en razón de la rapidez con que se puede encontrar el resto de una división por 9, y tendremos un medio cómodo de efectuar la prueba de una multiplicación.

En efecto, sea la multiplicación siguiente: $512 \times 43 = 22016$

512	512 dividido por 9 da por resta 8	8
$\times$ 43	43 dividido por 9 da por resta 7	$\times$ 7
= 22016	22016 y 56 divididos por 9 dan respectivamente por resta 2	= 56

De esa manera se ve que habiendo efectuado una multiplicación ($512 \times 43 = 22016$), y habiendo determinado las restas (8 y 7) de la división por 9 del multiplicando (512) y del multiplicador (43); después el producto (56) de las restas (8 y 7); la resta (2) de la división por 9 del producto (23016) de la multiplicación, deberá ser igual á la resta (2) de la división por 9 del producto (56) de las restas (8 y 7).

Disposición de las restas para la prueba por 9 de la multiplicación.

$$
\begin{array}{r l}
512 & (8 \\
43 & (7 \\
\hline
1536 & \\
2048 & \\
\hline
22016 & (2
\end{array}
$$

Colocadas las restas 8 y 7 respectivamente á continuación del multiplicando y del multiplicador, la resta 2 se halla (horizontalmente) á continuación de 22016, producto de la multiplicación de los números, y (verticalmente) respecto de 8 y 7, restas cuyo producto 56, dividido por 9, da por resta 2. Así como 22016, dividido por 9, da igualmente por resta 2.

Resulta de lo precedente un medio de hacer la prueba por 9 de la división. En efecto, sabemos que el cociente $\times$ el divisor debe reproducir el dividendo. Si hay una resta, no habiendo sido dividida, ha de ser rebajada del dividendo.

Sea 22022 dividido por 43. Tendré 512 por cociente y 4 por resta, lo que equivale á decir que 22016, dividido por 43 da exactamente 512 por cociente sin resta.

Disposición para hacer la prueba por 9 de la división.

$$
\begin{array}{r l l}
22016 & & (2 \\
22020 & \underline{|\;43\qquad\qquad} & (7 \\
215 & 512 & (8 \\
\hline
52 & & \\
43 & & \\
\hline
90 & & \\
86 & & \\
\hline
4 & &
\end{array}
$$

Inscribo el dividendo rectificado 22016 igual al dividendo 22020 — la resta 4) encima del dividendo. Inscribo á continuación del divisor (43) y del cociente (512) las restas (7 y 8) de la división por 9 de esos números, é inscribo debajo de esas restas y á continuación del dividendo rectificado la resta (2) de la división de ese dividendo por 9. Esta resta habrá de ser igual á la de la división por 9 del producto (56) de las restas (7 y 8).

Observaciones.—La prueba por 9 no da la certidumbre absoluta de la exactitud de una operación. Hay, en efecto, casos (muy raros) en que los errores pueden compensarse.

La prueba por 3 puede hacerse como la prueba por 9.

También pueden hacerse las pruebas por 7 ó por 11, pero no son prácticas por ser mucho menos rápidas.

Las pruebas por 2, 5, 4, 25, 8, 125 conviene evitarlas. Por 2 y 5 no se verifica sino la última obra del resultado de la operación; por 4 y 25, las dos últimas; por 8 y 125, las tres últimas.

La prueba por 6 es una complicación inútil de la prueba por 3.

Descomposición de un número en sus factores (ó divisores) primos

Cuando los factores (ó divisores) de un número son números primos, se les denomina *factores primos* ó *divisores primos*.

Ejemplo: Los factores primos de 6 son 3 y 2.

Cuando un número no es primo (lo que quiere decir cuando es divisible por otros números, además de él mismo y la unidad) es siempre descomponible en factores, que son ellos mismos ó primos ó divisibles por números primos. Conviene saber componer un número en sus facultades primarias, y á este efecto se utilizan los caracteres en divisibilidad de los números.

Sea 540 descompuesto en sus factores primos. Se acostumbra disponer la operación como sigue:

$$\begin{array}{r|l} 540 & 2 \\ 270 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

El menor número primo después de 1 es 2. Escribo 540; trazo al lado una línea vertical descendente é inscribo 2 frente de 540. Efectúo la división é inscribo el cociente 270 debajo de 540. Siendo aún este cociente divisible por 2, inscribo 2 frente á él. Efectúo la división é inscribo el cociente 90 debajo de 270. Siendo aún este nuevo cociente divisible por 2, inscribo 2 frente á él. Efectúo la división é inscribo el cociente 45 debajo del 90. Observo que 45 no es divisible por 2. El número primo que sigue á 2 es 3. Resulta que 45 es divisible por 3, inscribo 3 á su frente. Efectúo la división é inscribo el cociente 15 debajo de 45. Este nuevo cociente es aún divisible por 3, inscribo 3 á su frente. Efectúo la división é inscribo el cociente 5 debajo de 15. Observo que 5 no es divisible por 3. El número primo que sigue á 3 es 5. Resulta que 5 es divisible por sí misma, inscribo 5 á su frente. Efectúo la división y escribo el cociente 1 debajo de 5. Observo que 1 no es divisible sino por sí mismo. No puedo, pues, descomponerlo en otros factores primos, y, haciendo la prueba, tendré

$$360 = 5 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2$$

Potencia

Recordemos (véase Primera Parte) que por POTENCIA se entiende el producto de un número multiplicado por sí mismo cierto número de veces. Según esto, multiplicar 2 por 2 es elevar 2 á la segunda potencia; multiplicar por 2 el producto de 2×2 es elevar 2 á la tercera potencia.

Se indica la potencia de un número colocando á la derecha de ese número y un poco más arriba una cifra pequeña, llamada *exponente*.

Ejemplo: $2 \times 2 \times 2$ ó 2 á la tercera potencia se escribe 2^3 y se lee: «Dos potencia tres».

Así, en vez de escribir

$$360 = 5 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2$$

podría poner:

$$360 = 5 \times 3^2 \times 2^3$$

Máximo común divisor

El máximo común divisor de varios números es igual al producto de sus factores primos comunes á la potencia menor.

Sea hallar el máximo común divisor de 360, 90 y 45.

Descomponiendo estos números en sus factores primos, tendré:

$$360 = 5 \times 3^2 \times 2^3$$
$$90 = 5 \times 3^2 \times 2$$
$$45 = 5 \times 3^2$$

Conforme á la regla enunciada, el máximo común divisor de 360, 90 y 45 será igual al producto de sus factores primos comunes (5 y 3) á la menor potencia, es decir 5 *potencia* 1 y 3 *potencia* 2, ó sea $5 \times 3^2 = 5 \times 9 = 45$.

En efecto, se han de eliminar primeramente los divisores que no son comunes (en la especie 2); y, respecto de los divisores que son comunes, si se tomase una potencia superior á la menor, no dividiría ya el del número en el cual ese divisor está en la potencia menor.

Mínimo común múltiplo

El mínimo común múltiplo de varios números es igual al producto de sus factores primos á la más alta potencia.

Sea encontrar el número común múltiplo de 360, 80 y 45.

Conforme á la regla enunciada, el mínimo común múltiplo de esos números será igual al producto de sus factores primos (5, 3 y 2) á la mayor potencia, es decir, $5 \times 3^2 \times 2^3 = 5 \times 9 \times 8 = 360$.

En efecto, si 360 no contuviera todos los factores primos de 360, 90 y 45 á la mayor potencia, ni sería divisible por el de los números que no contuviera los factores primos á la potencia requerida, y, por consecuencia, no sería múltiplo. Por otra parte, si se tomase un múltiplo de 360, 90 y 45 que contuviera, además de los factores primos de esos números á su mayor potencia, otros factores, ese múltiplo sería común á los tres números, pero sería superior á 360 y por consiguiente, no sería el mínimo común múltiplo.

Observación.—En los ejemplos escogidos se notará que el máximo común divisor de 360, 90 y 45 es el menor de esos tres números, y que el mínimo común múltiplo es el mayor de esos tres números. Eso consiste en que 45 es precisamente igual al producto de los factores primos comunes de los tres números á la menor potencia, y que 360 es precisamente igual al producto de los factores primos de los tres números á la mayor potencia.

Raíz

Hemos visto en la Primera Parte que se llama *raíz* un número que, multiplicado cierto número de veces por sí mismo, produce un número llamado *potencia* y del cual es la raíz. Sabemos que se llama *índice* la cifra que indica cuantas veces ha de multiplicarse la raíz por sí misma para producirse la potencia.

La segunda potencia de un número se denomina *cuadrado* del número; la tercera potencia, *cubo* del número, lo que es lógico si se tiene en cuenta que hemos dicho (Cuarta Parte) de las superficies y de los volúmenes; 8 es *raíz cuadrada* de 64, puesto que $8 \times 8 = 64$; 10 es *raíz cúbica* de 1000, puesto que $10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1000$.

La palabra *raíz* ó *radical* de un número se escribe, abreviada por el signo $\sqrt{}$ colocado delante del número y el índice se pone sobre este signo. Por ejemplo, raíz cúbica de 1000 se escribe $\sqrt[3]{1000}$.

El signo $\sqrt{}$ es una deformación de la letra *r*, inicial de la palabra *raíz*.

Hemos visto (Primera Parte) que las operaciones relativas á la raíz cuadrada son un caso particular de la división, lo mismo que ésta es un caso particular de la sustracción.

La *sustracción* consiste en *cercenar un número* *de otro una vez y en encontrar la resta,* que puede ser nula si los dos números son iguales.

La *división* consiste en cercenar *cierto número de veces un número de otro y en calcular ese número de veces, así como la resta,* que puede ser nula si el dividendo puede ser dividido en partes iguales, siendo además cada una igual al divisor.

La extracción de la raíz de un número, que podría llamarse *racinación,* es una especie de división ó de divisiones en la cual ó en las cuales el divisor y el cociente han de ser iguales y ambos se han de encontrar, lo que se enuncia en otros términos diciendo: La racinación, ó la extracción de la raíz de un número, es la operación que consiste en buscar por el cálculo el número que, multiplicado por sí mismo cierto número de veces, reproduce este número.

Lo mismo que una división ordinaria, la extracción de raíces puede resultar exacta ó dejar una resta.

Extracción de la raíz cuadrada

Extraer la *raíz cuadrada* de un número es buscar por el cálculo el número que, multiplicado por sí mismo (ó elevado al cuadrado) reproduce ese número.

Se ve en seguida que, para los números inferiores á 100, puede utilizarse la tabla de multiplicación y de división, por hallarse en esta tabla los cuadrados de los nueve primeros números en la diagonal que va de 1 á 100.

Sea encontrar la raíz cuadrada de 36. Tomo este número sobre la diagonal y puedo asegurarme que el número 6 se encuentra á la vez encabezando la columna vertical y la horizontal, en la intersección de las cuales está 36, lo que significa que $6 \times 6 = 36$, ó en otros términos $\frac{36}{6} = 6$, ó también $\sqrt{36} = 6$.

Sea encontrar la raíz cuadrada de un número que no sea un cuadrado perfecto y que, por consiguiente, no esté en la diagonal en cuestión; sea, por ejemplo, encontrar la raíz cuadrada de 43. Tomaría sobre la diagonal la cifra más aproximada y habría de escoger entre 36 por defecto y 49 por exceso, lo que me daría por raíz cuadrada de 43 el número 6 por defecto y el 7 por exceso, y me permitiría calcular la resta, que es 7 por defecto.

Observación.—Resulta de lo precedente que muy pocos números son cuadrados perfectos, y que es muy raro que se pueda extraer una raíz cuadrada exactamente, puesto que, por ejemplo, sólo 10 de los 100 primeros números son cuadrados perfectos. Se dice en este caso que la raíz cuadrada de un número que no es un cuadrado perfecto es *inconmensurable,* lo que significa que no tiene medida común alguna con la unidad, ó, en otros términos, que es imposible representarla por un número. No quiere esto decir que no haya medio alguno de representarla por signos. La geometría, en efecto, nos suministra el medio de representarla por una línea.

Si se trata de extraer la raíz cuadrada de un número mayor que 100, se utiliza á este efecto el principio siguiente:

El cuadrado de la suma de dos números se compone del cuadrado del primer número, más el doble producto del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo.

Sea 12, número que representa la suma de una decena + 2 unidades. El cuadrado de 12 se compondrá del cuadrado de las decenas, más el doble producto de las decenas por las unidades, más el cuadrado de las unidades.

En efecto, $12 = 1$ decena $+ 2$ unidades.

$12^2 = 10$ decenas $+ 2$ unidades repetidas una decena de veces más dos veces;

Una decena $+ 2$ unidades repetidas una decena de veces = una decena al cuadrado — una decena $\times$ 2 unidades, y

Una decena $+ 2$ unidades repetidas dos veces = una decena $\times$ 2 unidades $+$ 2 unidades al cuadrado.

Puedo, pues, decir:

12^2 (ó el cuadrado de la suma de una decena más 2 unidades) $= 10^2$ (ó el cuadrado de las decenas) $+ 2$ veces el producto 10×2 (ó el doble producto de las decenas por las unidades) $+ 2^2$ (ó el cuadrado de las unidades).

Hago la prueba y obtengo:

10^2	$= 100$
2 veces 10×2 ó 2 veces 20 . . .	$= 40$
2^2	$= 4$
12×12	$= 144$

De este principio se deduce el método siguiente de extraer la raíz cuadrada de un número mayor que 100.

Sea extraer la raíz cuadrada de 62154. Este número es mayor que 100, tiene más de dos cifras, su raíz será, pues, mayor que 10, (puesto que $10 \times 10 = 100$). La raíz cuadrada de 62154 comprenderá pues, decenas y unidades, y 62154 representará el cuadrado de las decenas, más el doble producto de las decenas por las unidades, más el cuadrado de las unidades. Como sabemos que el cuadrado de decenas produce centenas, no buscaremos las decenas de la raíz sino en las centenas de 62154, es decir, en 621 centenas, lo que equivale á separar las dos últimas cifras del número 52154 *.

El razonamiento precedente se aplica al número 621, que es mayor que 100, que tiene más de 2 cifras y cuya raíz será mayor que 10 y, por consiguiente, será descomponible en decenas y en unidades. Las decenas se encontrarán en las centenas de 621, es decir, en 6 centenas, lo que equivale á separar las dos últimas cifras del número 621.

De esta manera se llega primeramente á dividir en grupos de dos cifras, á partir de la derecha, el número de que se quiere extraer la raíz cuadrada, y se practica del modo siguiente:

	$\sqrt{6.21.54}$	249		
	4	tanteo de 5	tanteo de 4	tanteo de 9
1.ª resta	22.1	45	44	489
	17.6	5	4	9
2.ª resta	455.4	225	176	4401
	440.1			
3.ª resta	15.3			

Divido 62154 en grupos de dos cifras á partir de la derecha.

Si quiero extraer primeramente la raíz cuadrada de 621 centenas, observo que siendo ese número mayor que 100, su raíz tendrá decenas y unidades. 621 será, pues, igual al cuadrado de las decenas de su raíz, más el doble producto de las decenas por las unidades de la raíz, más el cuadrado de las unidades.

Mas, no pudiendo el cuadrado de las decenas de la raíz dar más que centenas ($10 \times 10 = 100$), se ha-

* En las clases elementales basta indicar, sin demostrarlo, el procedimiento de extracción de la raiz cuadrada

llará todo entero en las seis centenas procedentes del doble producto de las decenas por las unidades.

El mayor cuadrado contenido en 6 es 4, cuya raíz 2 nos dará la cifra de las decenas de la raíz de 621 centenas. Escribo 2 al otro lado de una línea vertical colocada á la derecha del número 62154 cuya raíz cuadrada busco. Escribo 4, cuadrado de 2, debajo de 6; hago la sustracción (rebajando 4 centenas de 621 centenas) y obtengo una resta de 221 centenas, que comprende (puesto que tengo ya el cuadrado de las decenas de la raíz de 612 centenas) el doble producto de las decenas de esta raíz por las unidades, más el cuadrado de las unidades.

Observo que el doble producto de las decenas por las unidades de la raíz de 221 no puede encontrarse más que en las 22 decenas de este número (puesto que un número multiplicado por decenas da un producto de decenas). Separo, pues, por un punto esas 22 decenas, de la cifra 1. Puesto que el número 22 contiene el doble producto de las decenas de la raíz buscada por las unidades de esta raíz (más las unidades que pueden provenir del cuadrado de las unidades), puedo ya hacer el doble de las dos decenas que tengo, y obtendré 4, que escribo en el lugar en que se acostumbra poner el cociente de una división. Como este número 4 se encuentra multiplicado por cierto número de unidades para producir 22 decenas, dividiré 22 por 4 para hallar el número de las unidades, que será 5.

Antes de inscribir esta cifra al lado de 2 y siendo como es la cifra de las unidades de la raíz de 621 centenas, se trata de comprobarlo, es decir, de ver si esa cifra al cuadrado (cuadrado de las unidades) y añadida al doble producto de las decenas por las unidades (40 × por 5) reproduce 221. Puedo hacer estas dos operaciones en una sola vez, inscribiendo al lado de 4 (doble producto de 2 decenas), las 5 unidades, (lo que me dará 45) y multiplicando este número por 5. De esta manera 5 multiplicará las unidades y el doble producto de las decenas. Efectúo esta multiplicación de 45 por 5 y obtengo como producto 225, número mayor que 221. Esto me demuestra que he tomado el número de las unidades demasiado elevado, y tomo un número menor, 4, que me da 176, inferior á 221.

Inscribo entonces 4 al lado de 2, y como siendo la cifra de las unidades de la raíz, y rebajo 176 de 221, lo que me da por resta 45; y concluyo que la raíz cuadrada de 621 centenas es 24 centenas á unas 45 unidades de aproximación, lo que es exacto, porque $621 - 45 = 576 = 24^2$.

Pero no busco solamente la raíz cuadrada de 621 centenas, sino que busco en realidad la raíz cuadrada de 621 centenas más 54 unidades. Ya tengo la cifra de las centenas y la de las decenas de esta raíz, más una resta que exprese centenas y á las cuales añadiré las 54 unidades del número 62154.

Raciocinaré como precedentemente y diré que teniendo ya las 24 decenas de la raíz, y habiendo rebajado el cuadrado de esas 24 decenas del número 62154, esas 4554 unidades de la resta deben contener el doble producto de las decenas de la raíz por las unidades, más el cuadrado de las unidades de esta raíz.

Continuando el raciocinio como precedentemente, diré que el doble producto de las decenas por las unidades de la raíz de 4554 no puede encontrarse sino en las 455 decenas de ese número; separaré con un punto esas 455 decenas de la cifra 4 de las unidades; doblaré las 24 decenas de la raíz para obtener el cuadrado de las decenas de esta raíz y tendré 48, que escribiré en el lugar en que suele ponerse el cociente de una división (lugar que me sirve para los tanteos). Réstame dividir 455 por 48 para encontrar el número 9 de las unidades de la raíz buscada.

Escribiré 9, colocándole al lado de 48 decenas, y tendré 489, que multiplicaré por 9, lo que me producirá 4401, inferior á 4554 y me demostrará que 9 es la cifra de las unidades de la raíz de 62154. Inscribiré, pues, esta cifra 9 al lado de las 24 decenas; rebajaré 4401 de 4554, lo que me dará por resta 153, y concluyo que la raíz cuadrada de 62154 es 249 á unas 153 unidades de aproximación, lo que es exacto, porque $62154 - 153 = 62001 = 249^2$.

Observación.—Si quiero tener la raíz cuadrada de 62154 á un décimo, á un centésimo, á un milésimo de unidad de aproximación, continuaré la operación añadiendo á la resta 153 dos ceros, y operaré como sobre las restas precedentes, lo que me dará décimas y una resta á la que añadiré otros dos ceros, y sobre la cual operaré para obtener centésimas y otra resta á la que añadiré otros dos ceros para calcular las milésimas, etc.

Regla para la extracción de la raíz cuadrada de un número mayor que 100 *

Divídase el número de que se quiera extraer la raíz cuadrada en grupos de dos cifras, á partir de la derecha, pudiendo quedar á izquierda una sola cifra.

Se extrae la raíz cuadrada del grupo de la izquier-

* En las clases elementales se comenzará por enseñar la extracción de la raíz cuadrada de los números inferiores á 100; después en las clases menos elementales se dará la regla anterior; por último, cuando los niños puedan seguirla se les dará la teoría completa.

da por medio de la tabla de multiplicación y de división. Se escribe esta raíz á la derecha del número dado.

Se rebaja el cuadrado de esta raíz del grupo de izquierda y se inscribe al lado de la resta, el grupo siguiente, teniendo cuidado de separar con un punto la última cifra de este grupo.

Se divide la porción á izquierda de este punto por el cuadrado de la raíz encontrada, y se obtiene, salvo verificación, la segunda cifra de la raíz buscada.

Para tantear esta cifra se inscribe en el lugar del cociente de una división, al lado del doble de la primera cifra de la raíz, y se multiplica la cifra así obtenida, por la cifra de tanteo (lo que da el doble producto de las decenas de la raíz por las unidades, más el cuadrado de las unidades de la raíz), y se rebaja este producto de la primera resta. Si esto es posible, es que la cifra es buena. Se le inscribe entonces como segunda cifra de la raíz buscada. Si no hay tal posibilidad, se tantea de la misma manera una cifra inferior.

Habiendo obtenido así una segunda resta, se rebaja al lado el grupo siguiente, separando por un punto la última cifra de la derecha de este grupo.

Se divide la porción izquierda de este punto por el doble de la raíz encontrada hasta entonces, y se obtiene, salvo rectificación, la tercera cifra de la raíz buscada.

Se continúa de la misma manera hasta haber bajado todos los grupos.

Extracción de la raíz cúbica

Extraer la *raíz cúbica* de un número es buscar por el cálculo el número que, elevado á la tercera potencia (ó elevado al cubo), reproduce este número.

Cuando se trata de números inferiores á 1000, se puede construir á este efecto la tabla siguiente de los cubos de los 10 primeros números y asegurarse que están todos comprendidos en la serie de los números de 1 á 1000.

$$1^3 = 1 \quad ó \quad \sqrt[3]{1} = 1$$

$$2^3 = 8 \quad ó \quad \sqrt[3]{8} = 2$$

$$3^3 = 27 \quad ó \quad \sqrt[3]{27} = 3$$

$$4^3 = 64 \quad ó \quad \sqrt[3]{64} = 4$$

$$5^3 = 125 \quad ó \quad \sqrt[3]{125} = 5$$

$$6^3 = 216 \quad ó \quad \sqrt[3]{216} = 6$$

$$7^3 = 343 \quad ó \quad \sqrt[3]{343} = 7$$

$$8^3 = 512 \quad ó \quad \sqrt[3]{512} = 8$$

$$9^3 = 729 \quad ó \quad \sqrt[3]{729} = 9$$

$$10^3 = 1000 \quad ó \quad \sqrt[3]{1000} = 10$$

No expondremos detalladamente en este tratado elemental la teoría de la raíz cúbica, limitándonos á enunciar el principio utilizado y á dar la regla apoyada en un ejemplo.

El principio utilizado es el siguiente, que se demuestra por el mismo procedimiento que el empleado para demostrar el principio concerniente á la raíz cuadrada.

El cubo de la suma de dos números se compone del cubo del primero, más tres veces el cuadrado del *primero multiplicado por el segundo, más tres veces el primero multiplicado por el cuadrado del segundo, más el cubo del segundo.*

De donde se sigue:

El cubo de un número compuesto de decenas y de unidades comprende el cubo de las decenas, más tres veces el cuadrado de las decenas multiplicado por las unidades, más tres veces las decenas multiplicadas por el cuadrado de las unidades, más el cubo de las unidades.

Regla para la extracción de la raíz cúbica de un número superior á 1000

Sea extraer la raíz cúbica de 42157683

Disposición de la operación

42.157.683	348	
$3^3=27$	$3^2 = 9$	$34^2 = 1156$
151.57	$\times\ 3$	$\times\ 3$
$34^3=39304$	$= 27$	$= 3468$
28536.83	151 : 27 = 5	28536: 3468=8
$348^3=$ 42144192	$35^3=$ 42875, superior á 42157.	$348^3=$42144192 inf. á 42157683.
Resta 13491	5 es excesivo.	8 es bueno.
	Pruébese 4.	

Partir el número (42.157.683), del cual se quiere extraer la raíz cúbica, en grupos de 3 cifras, á partir de la derecha, pudiendo caber en el último grupo á la izquierda solamente una ó dos cifras.

Extraer la raíz cúbica (42) del último grupo á izquierda, por medio de la tabla de los cubos de los 10 primeros números. Escribir esta raíz (3) á la derecha del número dado (42.157.683).

Separar el cubo (27) de esta raíz (3) del grupo de izquierda (42) é inscribir, al lado del resto (15), el grupo siguiente (157), cuidando de separar con un punto las dos últimas cifras (57) de este grupo.

Dividir la porción á izquierda de este punto (151) por 3 veces el cuadrado (9) de la raíz (3) encontrada (es decir, por 27), y se obtiene, salvo comprobación, la segunda cifra (5) de la raíz buscada.

Para tantear esta cifra (5) la inscribo al lado de la primera cifra (3) de la raíz (lo que da 35). Elevo 35 al cubo y obtengo 42875, superior á 42157. La cifra 5 es, pues, excesiva. Pruebo el 4. $34^3 = 39304$, inferior á 42157. La cifra 4 es, pues, la segunda cifra de la raíz buscada.

Restar el cubo (39304) de la raíz obtenida (34), de los dos primeros grupos de la izquierda (42157). Inscribir al lado de la resta (2853) el grupo siguiente (683), cuidando de separar con un punto las dos últimas cifras (83) de este grupo.

Dividir la porción á izquierda del punto (28536) por 3 veces el cuadrado (1156) de la raíz encontrada (34), (es decir, por 3468), y se obtiene, salvo á comprobación, la tercera cifra (8) de la raíz buscada.

Para tantear esta cifra (8), la inscribo al lado de las dos primeras cifras (34) de la raíz (lo que me da 348). Eleva 348 al cubo, y obtengo 42144192, inferior á 42157683. La cifra 8 es, pues, la tercera y última cifra de la raíz buscada (348), puesto que no queda más grupo que rebajar.

Restar el cubo (42144192) de la raíz (348) de los 3 grupos del número (42157683), es decir de la totalidad del número cuya raíz se busca y se obtiene una resta 13491.

Se comprueba que la raíz cúbica de 42157683 es 348 á 13491 unidades de aproximación, puesto que $42157683 - 13491 = 42144192 = 348^3$.

Observación. — Si quiero tener la raíz cúbica de

42157683 á un décimo, á un centésimo, á un milésimo de unidad de aproximación, continuaré la operación añadiendo á la resta 13491 tres ceros, y haré la misma operación que con las restas precedentes, lo que me dará décimas de la raíz y una resta, á la que añadiré otros tres ceros, y sobre la cual operaré para obtener centésimos de la raíz y otra resta, á la que añadiré aún tres ceros para calcular las milésimas, etc.

Extracción de las raíces 4.ª, 6.ª, etc.

Se extrae la raíz cuarta de un número por medio de la extracción de dos raíces cuadradas consecutivas.

Se extrae la raíz sexta de un número por medio de la extracción de una raíz cuadrada, luego de una raíz cúbica.

Etc., etc.

Después veremos que es posible construir tablas que facilitan estas operaciones complicadas.

Fracciones

Hemos visto (primera parte) que si se divide la unidad en partes iguales, estas partes se llaman *quebrados*. Se les llama también *partes alícuotas* (del latín ALIQUOTUS = *cuantas veces)*.

Sabemos que para medir un grandor conviene compararle á un grandor de la misma naturaleza tomado como tipo y que se llama unidad. Mas el grandor que haya de medirse, al ser comparado á la unidad, puede ser igual á un corto número de veces la unidad, más alguna porción menor que la unidad. Esa porción menor que la unidad podrá medirse, no por la unidad, que es demasiado grande, sino por una fracción suficientemente pequeña de la unidad; por ejemplo, por un tercio, por un cuarto, por un décimo ó por un centésimo de la unidad.

Ejemplo: una cinta podrá tener una longitud de 2 metros más 3 cuartos de metro, ó una longitud de 2 metros 75 centímerros de metro (2m,75 centímetros).

Para expresar una fracción, bastará indicar en cuántas partes está dividida la unidad y cuántas se toman de esas partes.

El número por el cual se indica y por el cual se denomina en cuántas partes está dividida la unidad, se llama *denominador* (del latín DENOMINARE = *denominar);* el número por el cual se indica cuántas se toman de esas partes, qué número se cuenta de esas partes se llama *numerador* (del latín NUMERARE= *contar).*

Se escribe una fracción colocando el numerador sobre el denominador separados por una raya horizontal.

Ejemplo: La fracción 3 cuartos se escribe $\frac{3}{4}$.

Fracciones decimales

Si se divide la unidad en fracciones de 10 en 10 veces menores, es decir, en 10, 100, 1000, etc., partes, se tendrán *fracciones decimales,* lo que puede expresarse diciendo que una fracción decimal es aquella cuyo denominador es una potencia de 10.

Para escribir un número compuesto de unidades y de fracciones decimales se aplica simplemente la numeración decimal. Conforme á esta numeración, una cifra colocada á la derecha de otra representa unidades 10 veces menores Habiendo separado la parte entera de la parte fraccionaria por una coma, bastará inscribir las décimas á la derecha de la coma, las centésimas á la derecha de las décimas, etc.

Ejemplos:

2 unidades 7 décimas se escribe	2,7
42 unidades 3 centésimas se escribe	42,03
76 milésimas se escribe	0,076

Se pueden también escribir las fracciones decimales como las fracciones ordinarias.

Ejemplo: 76 milésimas puede escribirse $\frac{76}{1000}$

Números fraccionarios

En los ejemplos anteriores, como 2 unidades 7 décimas (2,7) puede leerse 27 décimas, puede escribirse $\frac{27}{10}$

Del mismo modo que 42 unidades 3 centésimas pueden leerse 4203 centésimas, puede escribirse $\frac{4203}{100}$

Si el número fraccionario (recordamos que se llama número fraccionario un número entero acompañado de una fracción) comprende un número entero acompañado de una fracción ordinaria, puede también convertirse en fracción. (1)

Sea 3 unidades + 2 tercios.

1 unidad = 3 tercios.

3 unidades = 3 tercios × 3 = 9 tercios.

9 tercios + 2 tercios = 11 tercios = $\frac{11}{3}$

---

(1) Debe advertirse para mayor claridad que el número llamado por el autor *número fraccionario*, es el que nosotros llamamos habitualmente *número mixto*, ó sea el que se compone de un número entero y un quebrado, y el caso á que se refiere no es otro que el de reducir un número mixto á quebrado.

Como se ve, basta para multiplicar la parte entera por el denominador de la fracción y añadir á este producto el numerador de la fracción para obtener el numerador de la fracción buscada.

Resulta de lo que precede, que una fracción puede ser igual, inferior ó superior á la unidad, y que un número cualquiera (entero ó fraccionario) puede ponerse siempre en forma de fracción.

Convirtiendo los números enteros en fracciones cuyos denominadores sean 1, se vuelve á la definición de los números como resultados de la comparación de una pluralidad con una unidad. Enunciar un número es, pues, habiendo considerado un grupo dividido en tantas partes iguales como unidades contiene, considerar como denominador la unidad y como numerador la suma de las unidades del grupo.

Decir 6, 25, 437 significa 6 primas $\left(\frac{6}{1}\right)$, 25 primas $\left(\frac{25}{1}\right)$, 437 primas $\left(\frac{437}{1}\right)$

Se ha convenido en la práctica, para simplificación, en suprimir el denominador de esas fracciones, y decir simplemente seis, veinticinco, cuatrocientos treinta y siete.

En el *mecanismo del razonamiento* veremos que todo razonamiento puede convertirse en una ó varias comparaciones, y que la relación expresa el resultado de la ó de las comparaciones.

Bajo la forma más sencilla (fracción) la relación nos muestra, pues, los dos términos que se quieren comparar (numerador, denominador), unidos por la facilidad de la comparación y separados por una raya, consistiendo la convención en que la cifra colocada sobre la raya expresa el grupo, ó, si se quiere, el número de las unidades del grupo, y la cifra colocada debajo de la barra expresa el género de las unidades.

Hemos visto que se puede fácilmente convertir un número fraccionario en fracción, pues del mismo modo se puede siempre convertir una fracción en número fraccionario.

Sea $\frac{11}{3}$

Una unidad $=$ 3 tercios.

Luego tantas veces como haya 3 tercios en 11 tercios, habrá unidades.

11 dividido por 3 $=$ 3 y restan 2.

En $\frac{11}{3}$ hay, pues, 3 unidades $+ \frac{2}{3}$

Del mismo modo podríamos decir:

$$\frac{9}{3} = 3 \text{ unidades} + \frac{0}{3}$$

y

$$\frac{2}{3} = 0 \text{ unidades} + \frac{2}{3}$$

Si nos referimos á los ejemplos que preceden, como á lo que antes hemos expuesto, se puede concebir un número fraccionario como dando idea de un grupo compuesto de dos grupos (unidades y fracciones de unidades), y una fracción como el mismo grupo modificado por la división de las unidades en fracciones, es decir, como un grupo compuesto de una sola clase de fracciones de unidades.

En la realidad, para medir un grandor es raro que se le divida verdaderamente en grupos de unidades y de fracciones de unidades; soliendo contentarse con considerarle divisible en esos grupos, y esto es lo que hace posible una operación de medida. Conviene insistir en esta noción de medida que domina toda la ciencia.

Adición de las fracciones

Primer caso.—Si las fracciones que han de adicionarse tienen el mismo denominador, se suman los numeradores y se da á esta suma el denominador común.

Ejemplo. Sea adicionar $\frac{3}{127} + \frac{15}{127} + \frac{61}{127}$

Esto equivale á adicionar cantidades de la misma naturaleza, centésimo–vigésimo-séptimos.

	3	ciento	veinte	y	sieteavos.
+	15	ciento	veinte	y	sieteavos.
+	127	ciento	veinte	y	sieteavos.
=	145	ciento	veinte	y	sieteavos.

Segundo caso.—Si las fracciones que han de adicionarse no tienen el mismo denominador, se la reduce al mismo denominador por el método indicado después, y se opera en seguida como en el primer caso.

Tercer caso.—Adicionar los números fraccionarios.

Para ello se adicionan primero las fracciones, se convierte la suma hallada en número fraccionario y se añaden á los enteros de este número los enteros que figuren en los números fraccionarios que han de adicionarse.

Sea adicionar $8 + \frac{2}{6}$ y $5 + \frac{5}{6}$

Adiciono primeramente las fracciones $\frac{2}{6}$ y $\frac{5}{6}$ y tengo $\frac{7}{6} = 1 + \frac{1}{6}$

Adiciono luego los enteros 8 y 5 y tengo 13 que añado al entero de la suma $1 + \frac{1}{6}$ y tengo $14 + \frac{1}{6}$

Sustracción de las fracciones

Primer caso. — Si las fracciones tienen el mismo denominador se hace la diferencia de los numeradores y se da á esta diferencia el denominador común.

Ejemplo: Sea sustraer $\frac{4}{11}$ de $\frac{9}{11}$; esto equivale á disminuir de las undécimas cierto número de undécimas.

$$\begin{array}{r} 9 \text{ undécimas} \\ - \ 4 \text{ undécimas} \\ \hline = \ 5 \text{ undécimas} \\ \hline \end{array}$$

Segundo caso.—Las fracciones que se han de disminuir una de otra no tienen el mismo denominador. En este caso se les reduce á un mismo denominador por el método indicado después, y se opera en seguida como en el primer caso.

Tercer caso. — Sustracción de números fraccionarios.

Se podrán convertir los números fraccionarios en fracciones y se procederá como en el caso primero ó como en el segundo.

Así se podrá operar primeramente la sustracción sobre la parte fraccionaria, después sobre la parte entera. En este caso, si la parte fraccionaria que se ha de sustraer es mayor que la parte fraccionaria de que ha de ser sustraída, se le añadirá un entero, tomado á la parte entera del cual se tendrá cuenta en la sustracción de la parte entera.

Ejemplo: Sea haber de disminuir $3 + \frac{4}{5}$ de $8 + \frac{2}{5}$

$\frac{4}{5}$ no puede disminuirse de $\frac{2}{5}$, por lo que añado á $\frac{2}{5}$ una unidad, es decir, $\frac{5}{5}$, y tengo $\frac{7}{5}$, y digo $\frac{7}{5} - \frac{4}{5} = \frac{3}{5}$.

Para tener en cuenta esta unidad prestada, puedo, sea disminuirla de 8, lo que me da 7, del cual disminuyo aún 3 y tendré 4 para la parte entera de la diferencia buscada; sea añadir por compensación esta unidad á 3, lo que me da 4, que disminuiré de 8, y tendré igualmente 4 para la parte entera buscada, y diré:

$$\begin{array}{r} 8 + \frac{2}{5} \\ - \; 3 + \frac{4}{5} \\ \hline = 4 + \frac{3}{5} \\ \hline \end{array}$$

Multiplicación de las fracciones

Primer caso. — Multiplicar una fracción por un entero.

Para esto se multiplica el numerador de la fracción por el entero, y se da á este producto el denominador de la fracción.

Ejemplo: Sea multiplicar $\frac{4}{7}$ por 3, que equivale á repetir 3 veces $\frac{4}{7}$. Ya hemos visto que $\frac{4}{7} + \frac{4}{7} + \frac{4}{7} = \frac{12}{7}$

Observación. —Se sigue de lo expuesto que de 2 fracciones que tengan el mismo denominador, la mayor es la que tiene mayor numerador, y, consiguientemente, una fracción se hace mayor cuando su numerador aumenta, y menor, cuando aumenta su denominador.

Para multiplicar una fracción por un entero, es decir, para hacer uña fracción cierto número entero de veces mayor, se podrá, pues, llegar á este resultado haciendo su denominador ese número de veces menor, es decir, dividiendo su denominador por el número entero, si es posible, lo que tiene la ventaja de simplificar la fracción.

Segundo caso.—Multiplicar un entero por una fracción.

Para esto se opera como si se tuviese que multiplicar la fracción por el entero.

En efecto, sea multiplicar 3 por $\frac{4}{7}$, que equivale á repetir 3 cuatro séptimas de veces

$$\frac{1}{7} \text{ de veces } 3 = \frac{3}{7}$$

$$4 \text{ veces } \frac{1}{7} \text{ de veces } 3 = \frac{3}{7} + \frac{3}{7} + \frac{3}{7} + \frac{3}{7} = \frac{12}{7}$$

lo que equivale á multiplicar el entero por el numerador de la fracción y á dar al productor el denominador de la fracción.

Tercer caso.—Multiplicar una fracción por una fracción.

Para esto se multiplican los numeradores entre sí y los denominadores también entre sí.

En efecto, sea multiplicar $\frac{3}{5}$ por $\frac{7}{8}$, lo que equivale á repetir $\frac{3}{5}$ siete octavas de veces.

Tomar $\frac{1}{8}$ de veces $\frac{3}{5}$ equivale á hacer la fracción $\frac{3}{5}$ ocho veces menor, lo que puedo hacer multiplicando su denominador por 8 y tengo $\frac{3}{5 \times 8}$

7 octavas son 7 veces más que $\frac{1}{8}$, es necesario,

pues, multiplicar la fracción $\frac{3}{5 \times 8}$ por 7, lo que hago multiplicando por 7 el numerador y tengo $\frac{3 \times 7}{5 \times 8}$

Cuarto caso.—Multiplicación de los números fraccionarios.

Para esto se reducen los números fraccionarios en fracciones; se aplica la regla precedente.

Observaciones.—Cuando se multiplica una fracción por otra, el producto es menor que la fracción multiplicando si la fracción multiplicador es inferior á la unidad; el producto es mayor que la fracción multiplicando en el caso contrario, es decir, cuando la fracción multiplicador puede ser referida á un número fraccionario.

En los diversos casos de la multiplicación de las fracciones, se puede invertir el orden de los factores sin cambiar el producto, porque los números enteros pueden ponerse en forma de fracciones que tengan la unidad por denominador. Y efectuar el producto de dos ó más fracciones equivale á efectuar el producto de los términos, es decir, el producto de números enteros, y ya sabemos que este producto no cambia cuando se invierte el orden de los factores.

El valor de una fracción no cambia cuando se multiplica ó se dividen los dos términos por un mismo número.

En efecto, multiplicando ó dividiendo el numerador de una fracción por un número, se hace esta fracción en número de veces mayor ó menor; y multiplicando ó dividiendo el denominador por ese mismo número, se hacen la fracción el mismo número de veces menor ó mayor.

División de las fracciones

Primer caso.—Dividir una fracción por un entero.

Para esto se multiptica el denominador de la fracción por el entero y se da en este producto el numerador de la fracción.

En efecto, sea dividir $\frac{3}{4}$ por 15, lo que equivale á hacer la fracción $\frac{3}{4}$ quince veces menor, y ya sé que puedo hacerlo haciendo el denominador quince veces mayor.

Podré también, cuando sea posible, dividir el numerador de la fracción por el entero.

Segundo caso.—Dividir un entero por una fracción.

Para esto se multiplica el entero por la fracción divisor invertida.

En efecto, sea dividir 5 por $\frac{3}{7}$.

Si tuviésemos que dividir 5 por 3, tendríamos $\frac{5}{3}$; pero no se ha de dividir por 3, sino por $\frac{3}{7}$. Pero las séptimas son 7 veces menores que la unidad. Habiendo dividido por un divisor 7 veces mayor, tengo un cociente $\left(\frac{5}{3}\right)$ que es 7 veces menor. Para hacerle 7 veces mayor, basta multiplicarle por 7, y tendré $\frac{5}{3} \times 7 = \frac{5 \times 7}{3}$.

Tercer caso.—Dividir una fracción por una fracción.

Para ello se multiplica la fracción dividendo por la fracción divisor invertida.

La misma demostración que para el segundo caso.

$$\frac{6}{7} : \frac{4}{5} = \frac{6 \times 5}{7 \times 4}.$$

Observación.—Se puede también, siempre que sea posible, dividir los numeradores entre sí y los denominadores también entre sí. Sabemos, en efecto, que se puede hacer una fracción cierto número de veces menor, sea multiplicando su denominador, sea dividiendo su numerador por el número, y que se puede hacerla cierto número de veces mayor, sea multiplicando su numerador, sea dividiendo su denominador por el número.

Cuarto caso.—División de los números fraccionarios.

Para esto se reducen los números fraccionarios en fracciones y se aplica la regla del tercer caso.

Observación—Cuando se divide una fracción por otra, el cociente es mayor que la fracción dividendo cuando la fracción divisor es inferior á la unidad; el producto es menor que la fracción dividendo en el caso contrario.

Simplificación de las fracciones

Hemos visto que hay casos en que se puede operar sobre las fracciones sin modificar su valor. Esto ocurre cuando se multiplican ó se dividen los dos términos de una fracción por un mismo número.

Conviene observar que, por el contrario, se modifica el valor de una fracción cuando se añade ó se disminuye un mismo número en las dos fracciones.

Ejemplo: Si se añade un mismo número (2) á los dos términos de la fracción $\frac{2}{9}$, se modifica el valor de esta fracción aproximándola á la unidad. En efecto,

$$\frac{2+2}{9+2} = \frac{4}{11}.$$

$\frac{2}{9}$ es diferente de la unidad en $\frac{7}{7}$

$\frac{4}{11}$ es diferente de la unidad en $\frac{7}{11}$ solamente.

Se modifica también el valor de una fracción cuando se opera solamente sobre uno de los términos, como lo hemos hecho anteriormente.

Utilizando este principio que no cambia el valor de una fracción dividiendo los dos términos por un mismo número, se podrá simplificar una fracción cada vez que los dos términos sean divisibles por un mismo número, es decir, siempre que esos dos términos no sean primos entre sí. Dado este caso, la fracción quedará reducida á su más simple expresión.

Se utilizarán á este efecto las reglas de divisibilidad de los números y la de la descomposición de los números en factores primos.

Ejemplo. Sea simplificar la fracción $\frac{18}{30}$

18 y 30 son divisibles por 2, por lo que efectúo esta división y tengo

$$\frac{18}{30} = \frac{9}{15}$$

Siendo 9 y 15 divisibles por 3, efectúo esta división y tengo

$$\frac{9}{15} = \frac{3}{5}$$

Como 3 y 5 son primos entre sí, la fracción $\frac{3}{5}$

representa la fracción $\frac{18}{30}$ reducida á su más simple expresión.

Es fácil ver, por lo que precede, que se puede reducir una fracción á su más simple expresión, dividiendo los dos términos por su máximo común divisor.

Reducción de las fracciones al mismo denominador

Para esto se multiplican los dos términos de cada fracción por el producto de los denominadores de todos los otros.

En efecto, operando así no se cambian los valores de las fracciones y se hacen todos los denominadores iguales, puesto que tienen todos por denominador un mismo producto.

Ejemplo:

Sea reducir al mismo denominador las fracciones

$$\frac{2}{3} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{4}{5}$$

Aplicando la regla anterior, tendré

$$\frac{2 \times 4 \times 5}{3 \times 4 \times 5} \quad \frac{3 \times 3 \times 5}{4 \times 3 \times 5} \quad \frac{4 \times 3 \times 4}{5 \times 3 \times 4}$$

ó

$$\frac{40}{60} \quad \frac{45}{60} \quad \frac{48}{60}$$

Observación.—Además de las otras ventajas, se ve en seguida que la reducción de fracciones al mismo denominador permite distinguir los mayores.

Ya hemos visto que era preciso reducir las fracciones al mismo denominador para poder adicionarlas ó sustraerlas.

Reducción de las fracciones al mínimo común denominador

Es interesante saber, no sólo reducir fracciones al mismo denominador, sino también saber reducirlas al mínimo común denominador.

Este mínimo común denominador no puede ser sino el menor múltiplo común de todos los denominadores. En efecto, otro múltiplo común les sería superior.

Se sigue de aquí que, á los denominadores de las fracciones sobre que se opere por primos entre sí, su mínimo común múltiplo será su producto. De manera, que para reducir al mínimo común denominador varias fracciones cuyos denominadores son primos entre sí, bastará multiplicar los dos términos de cada uno por el producto de los denominadores de las otras.

Si, por el contrario, los denominadores de las fracciones sobre que se opera no son todos primos entre sí, bastará buscar su mínimo común múltiplo, que será también su mínimo común denominador. Faltará entonces determinar los numeradores respectivos. Para esto se dividirá este mínimo común múltiplo por cada denominador, y se multiplicará cada numerador por el cociente correspondiente. De esta manera, habiéndose multiplicado por un mismo número los dos términos de cada fracción, el valor de cada fracción no será modificado, y todos los denominadores serán bien iguales al mínimo común múltiplo.

Sea reducir al mínimo común denominador las fracciones

$$\frac{43}{720} \quad \frac{15}{90} \text{ y } \frac{2}{315}$$

Descompongo 720, 90 y 315 en sus factores primos y tengo

$$720 = 2^4 \times 3^2 \times 5$$
$$90 = 2 \times 3^2 \times 5$$
$$315 = 3^2 \times 5 \times 7$$

Siendo igual el mínimo común múltiplo de 720, 90 y 315 al producto de sus factores primos á la más alta potencia, es igual á $2^4 \times 3^2 \times 5 \times 7 = 45360$, que es también el mínimo común denominador buscado.

Para encontrar los numeradores correspondientes, divido ese número respectivamente por cada dominador, es decir, por 720, por 90 y 315, y tengo por cocientes respectivos 63, 504 y 144.

Multiplico los numeradores 43, 15 y 2 respectivamente por esos cocientes y tengo los productos 2709, 7560 y 288 que representa los numeradores buscados.

Las fracciones $\frac{43}{720}$, $\frac{15}{90}$ y $\frac{2}{315}$, reducidas al número común denominador son, pues, iguales á

$$\frac{2709}{45360}, \frac{7560}{45360} \text{ y } \frac{288}{45360}$$

Operaciones sobre las fracciones decimales

Hemos visto que se pueden escribir las fracciones decimales utilizando el principio que toda cifra colocada á la derecha de otra representa unidades de 10 en 10 veces menores, y que se reconocen las fracciones decimales en que se separan de las unidades por una coma.

Sabemos que, en consecuencia, cambiando de lugar la coma de 1, 2, etc. lugares hacia la izquierda ó hacia la derecha se hace un número 10, 100, etc. veces menor ó mayor.

Ejemplos:

7145,34 es 10 veces menor que 71453,4.

71453,4 es 100 veces mayor que 714,534

En efecto,

$$7145,34 = 7145 \text{ unidades, } 34 \text{ centésimas ó } \frac{714534}{100}$$

$$71453,4 = 71453 \text{ unidades, } 4 \text{ décimas ó } \frac{714534}{10}$$

$$714,534 = 714 \text{ unidades, } 534 \text{ milésimas ó } \frac{714534}{1000}$$

Observación.—No se modifica una fracción decimal añadiendo uno ó varios ceros á su derecha, lo que equivale á multiplicar su denominador y su numerador por 10, 100, etc.

En efecto,

$$0,2 = 0,20 = 0,200, \text{ etc.}$$

porque puedo poner estas fracciones bajo la forma

$$\frac{2}{10} = \frac{20}{100} = \frac{200}{1000} \text{ etc.}$$

Adición y sustracción de fracciones decimales

Se operará como para los números enteros, teniendo cuidado de poner las comas las unas debajo de las otras.

Sea adicionar 0,25 + 0,5 + 0,034

Tendré

$$\begin{array}{r} 0,25 \\ +\ 0,5 \\ +\ 0,034 \\ \hline +\ 0,784 \end{array}$$

En efecto, es como si tuviera que adicionar 250 milésimas, 500 milésimas y 34 milésimas.

La misma demostración para la sustracción.

Multiplicación de fracciones decimales

Basta separar del producto tantas cifras decimales como haya en los dos factores.

Sea multiplicar 5,21 por 4,3

$$\begin{array}{r} 5,21 \\ \times\ 4,3 \\ \hline 1563 \\ 2084 \\ \hline = 22,403 \end{array}$$

En efecto,

$$\frac{521}{100} \times \frac{43}{10} = \frac{521 \times 43}{100 \times 10} = \frac{22403}{1000} = 22,403$$

División de fracciones decimales

Bastará multiplicar el dividendo y el divisor por 10, ó por 100, ó por 1000, etc., según el caso, de manera que se suprima la parte decimal, y se operará en seguida sobre números enteros.

Sea dividir 3,60 por 0,9

$$\text{Tendré } \frac{3,60}{0,9} = \frac{3,60 \times 10}{0,9 \times 10} = \frac{36}{9} = 4$$

Habiendo multiplicado los dos términos por un mismo número 10, no habré cambiado el valor de la fracción.

Observación.—Si la división diese una resta, podría continuarla añadiendo un cero á esa resta y poniendo una coma después del cociente.

Sea dividido 32,13 por 0,90, equivalente á dividir 3213 por 90, y se tendrá:

$$\begin{array}{r|l} 3213 & 90 \\ \cline{2-2} 270 & 35 \\ \cline{1-1} 513 & \\ 450 & \\ \cline{1-1} 63 & \end{array}$$

En este caso añadiré un cero á 63 y una coma después de 35, lo que me permitirá buscar las décimas del cociente. Si queda otra resta añadiré otro cero á esa resta y buscaré las centésimas del cociente, y así sucesivamente.

$$
\begin{array}{r|l}
3213 & 90 \\ \cline{2-2}
270 & 35{,}7 \\ \cline{1-1}
513 & \\
450 & \\ \cline{1-1}
630 & \\
630 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

3,60 dividido por 0,9 = 35,7

Observación general sobre las fracciones

Toda fracción puede ser considerada como el enunciado de una división que ha de efectuarse, siendo el numerador el dividiendo y el dominador el divisor.

En efecto,

$$\frac{3}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5}$$

Es decir, una unidad dividida en 5 partes + una unidad dividida en 5 partes + una unidad dividida en 5 partes, ó 3 unidades divididas por 5.

Por consiguiente, efectuar la división equivale precisamente á reducir una fracción ordinaria á fracción decimal, puesto que efectuando la división se hace uso del sistema decimal.

En efecto, para dividir 3 por 5, diré: ¿cuántas veces entra 5 en 3, ninguna vez?; 3 unidades = 30 décimas. ¿Cuántas entra 5 en 30 décimas..., etc.? Habiendo convertido así las 3 unidades en décimas, determinaré entonces el cociente en décimas; después, si es preciso en centésimas, etc.

$$\begin{array}{l|l} 30 & 5 \\ \hline 0 & 0,6 \end{array}$$

y tendré $\frac{3}{5} = 0,6$

Puede suceder que sea imposible terminar la división. Sea la fracción $\frac{9}{11}$

Si efectúo la división tendré

$$\begin{array}{l|l} 90 & 11 \\ \cline{2-2} 88 & 0,8181... \\ \hline \ \ 20 & \\ \ \ 11 & \\ \hline \ \ \ \ 90 & \\ \ \ \ \ 88 & \\ \hline \ \ \ \ \ \ 20 & \\ \ \ \ \ \ \ 11 & \\ \hline \ \ \ \ \ \ \ \ 9 & \end{array}$$

Semejante cociente, cuyas cifras se reproducen se denomina *cociente periódico*, y la fracción misma toma el nombre de *fracción periódica*.

El cociente y la fracción se llaman *periódicos simples* en el caso que nos ocupa. Son *periódicos mixtos* cuando sólo una parte del *cociente es periódico*.

Ejemplo: $\frac{11}{12} = 0,91666...$

Cálculo mental

Se entiende por cálculo mental (del latín MENS = *espíritu)* el que se hace en el cerebro y sin ayuda de la escritura.

En el punto á que hemos llegado, es fácil dar algunas indicaciones sobre este asunto.

El cálculo mental reposa sobre cierto número de principios muy sencillos, entre los cuales los principales son los tres siguientes:

1.° Memoria de las diferentes tablas (tablas de adición y de sustracción, de multiplicación y de división, de potencias y de raíces, etc.).

Tanto como es malo aprender «de memoria» datos mal comprendidos, es bueno ejercer la memoria reteniendo lo que se ha comprendido bien. Conviene, pues, enseñar á los alumnos á construir por sí mismos las diferentes tablas y mostrarles en seguida la gran ventaja que posee el que ha sabido retenerlas. Sin la memoria de esas tablas, las operaciones más usuales y elementales se efectuarán con gran pérdida de tiempo *.

2.° La utilización de las propiedades de los números y sobre todo de las propiedades pertenecientes á los 9 primeros números.

Sabemos, en efecto, que el sistema decimal nos permite expresar un número cualquiera por medio de las cifras 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y del cero.

Ejemplo: Sabemos que $9 = 10 - 1$. Esta propiedad nos permitirá, por ejemplo, hacer constar que teniendo que añadir á 9 un número que no comprenda más veces que unidades, podremos tomar á ese número una unidad que añadiremos á 9 para formar una decena. Veremos entonces que la suma de 9 y del número será igual á una decena + el número disminuído de una unidad. Ejemplos:

$$9 + 7 = 10 + (7 - 1) = 10 + 6 = 16$$
$$9 + 4 = 10 + (4 - 1) = 10 + 3 = 13$$

* Los profesores cuidarán, desde el principio de la enseñanza de la aritmética, de habituar á los alumnos á efectuar mentalmente un cálculo del mismo género que el que haya efectuado por escrito. Pronto se verá que el ejercicio conduce á efectuar mentalmente cálculos cada vez más complicados.

Este procedimiento da una idea de todos los procedimientos análogos que consisten, toda vez que esto sea más cómodo, en añadir ó rebajar un número superior ó inferior al número dado, y á considerar la diferencia.

Ejemplo: sea añadir 196 á 249. Observo que 196 = 200 — 4. Añado 200 á 249 y tengo 249 + 200 = 449. Falta rebajar 4, lo que es fácil, y tengo 449 — 4 = 445.

3.° Olvidar voluntariamente, á medida que se efectúan las operaciones, los números sobre los cuales se opera, para no retener sino esos números modificados por las operaciones sucesivas.

Ejemplo: Sea sustraer 423 de 521.

Pienso en 521 y en 4, 2, 3 (sabiendo que 4 es centenas, 2 decenas y 3 unidades) y calculo así:

521 — 400 = 121. Falta rebajar 53 de 121

Pienso en 121 y en 2 y en 3 (sabiendo que 2 es decenas y 3 unidades) y calculo:

121 — 20 = 101. Falta rebajar 3 de 101

101 — 3 = 98

Desde la primera operación he olvidado voluntariamente los números 423 y 521, sobre todo el número 521, que he modificado á medida que efectuaba la operación, por medio de 4 (centenas), 2 (decenas) y 3 (unidades).

Casos particulares.—Conviene, en todos los casos en que ha de efectuarse frecuentemente una misma operación ó una misma serie de operaciones sobre números variables, aplicarse á encontrar simplificaciones. Estas simplificaciones se refieren á la utilización de ciertas reglas de cálculo. Respecto del cálculo mental, la construcción de tablas especiales, aprendidas en seguida, es de gran utilidad.

Mencionaremos solamente de paso la facultad que tienen ciertas personas de utilizar la memoria de la escritura, lo que les permite efectuar una operación representándose mentalmente todas las cifras como si estuviesen escritas.

Apresurémonos á añadir que esta facultad parece utilizada más ó menos por todas las personas que efectúan un cálculo mental.

Instrumentos de cálculo

Se ha llegado naturalmente á buscar instrumentos que permiten facilitar los cálculos, y ya sabemos que la palabra *cálculo* viene del latín CALCULI = *piedrecitas*.

Los primeros instrumentos de cálculo debieron de ser *las manos* con sus 2 veces 5 dedos. Todavía se enseña á los niños á «contar con los dedos». Esta costumbre la conservan además las personas que calculan difícilmente.

Se tiene también *contadores de bolas*, renovados del *abaco* antiguo. El abaco (del griego ABAX = *tabla*) era primitivamente una tablita enarenada sobre la cual se inscribían los cálculos. Se le transformó después fijando sobre ella cuerdas ó varillas con bolitas. Los contadores empleados actualmente en algunas escuelas son parecidos á los que emplean los jugadores de billar, que contienen diferentes líneas de 10 bolas cada una, de diferentes colores, por medio de las cuales se pueden representar las unidades, decenas, centenas, etc.

En algunos países está muy extendido aún el uso de los contadores. En Rusia, por ejemplo, el *stchote* y en China el *swan-pan* permiten, á los que saben servirse de ellos, la ejecución rápida de los cálculos más complicados.

Néper inventó un sistema de reglitas *(palitos de Néper)* para abreviar y simplificar los cálculos. Este sistema, completamente abandonado en el día, requería el empleo de cierta cantidad de reglitas iguales, que exigía un arreglo especial de los números de la tabla de multiplicación y de división.

El instrumento conocido bajo el nombre de *regla de cálculo* es muy práctico, pero necesita el conocimiento del empleo de los logaritmos, de que hablaremos después.

Existen reglas de cálculo muy sencillas para los usos completamente elementales.

El principio de ese instrumento consiste en el empleo de una regla graduada en la cual se desliza una reglita llamada *tirador* graduada también.

Supongamos la regla graduada hasta 20 y el tirador graduado hasta 10, y se verá fácilmente que puede sumarse, por ejemplo, 4 y 3, del modo siguiente:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20

. 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 tirador

Coloco la marca del tirador debajo del 4 de la regla; sobre el 3 del tirador se lee en la regla la suma 7.

Se comprende que complicando la regla y el tirador con tiradores complementarios para decenas y centenas puedan hacerse las operaciones, indicando sucesivamente los números que se retengan.

Por supuesto que instrumentos tan rudimentarios no tienen gran utilidad práctica aparte de su conveniencia educativa, y las reglas prácticas de cálculo son las que comprenden el empleo de los logaritmos *.

Por último se ha tenido la idea de construir *máquinas de calcular*. Las diferentes tablas y especialmente las de multiplicación y división han sugerido la idea de una máquina de calcular. Pascal, en 1663, construyó la primera máquina aritmética, compuesta de cuadrantes móviles y de ruedas de engranaje, y en nuestros días se ha llegado á construir máquinas de calcular muy perfeccionadas y prácticas.

Por todo lo que precede se ve cómo los trabajos acumulados por las generaciones tienden á facilitar los trabajos de las generaciones siguientes.

* En las clases elementales hágase construir á los niños reglas de calcular de papel ó de cartón y se les ejercitará en adición y en sustracción. También podrán hacerse reglas más largas para multiplicación y división. Convendrá entonces mostrar á los niños que en ese caso es preferible el uso de las tablas de multiplicación y de división.

CUADRO RECAPITULATIVO

DE LA TERCERA PARTE

Divisibilidad.—Propiedad que tiene un número de ser dividido por otro sin dejar resta.

Múltiplo de un número, el que contiene ese número varias veces exactamente.

Número primo, el que no es divisible más que por sí mismo y por la unidad.

Números primos entre sí, los que no tienen otro divisor común que la unidad.

Principio general de divisibilidad.—Todo número que divide otros números, divide la suma, la diferencia y los múltiplos de esos números.

Número divisible por 2, cuando es terminado por una cifra por (2, 4, 6, 8) ó por cero.

Número divisible por 5, cuando termina por cinco ó por cero.

Número divisible por 4, cuando termina por dos ceros ó cuando el número formado por sus decenas y sus unidades es divisible por 4.

Número divisible por 25, cuando termina por dos ceros ó cuando el número formado por sus decenas y sus unidades es divisible por 25.

Número divisible por 8, cuando termina por tres ceros ó cuando el número formado por sus centenas, sus decenas y sus unidades es divisible por 8.

Número divisible por 125, cuando termina por tres ceros ó cuando el número formado por sus centenas, sus decenas y sus unidades es divisible por 125.

Número divisible por 9, cuando la suma de sus cifras, adicionadas sin tener en cuenta el lugar que ocupan, es divisible por 9.

Número divisible por 3, cuando la suma de sus cifras, adicionadas sin tener en cuenta el lugar que ocupan, es divisible por 3.

Número divisible por 6, cuando es á la vez divisible por 2 y por 3.

Número divisible por 11, cuando la diferencia entre la suma de sus cifras de lugar impar (á partir de la derecha) y la suma de sus cifras de lugar par es divisible por 11.

Número divisible por 7, cuando (teniendo cuatro cifras ó más) después de haberle dividido (de derecha á izquierda) en partes de tres cifras, la diferencia entre la suma de las cifras pertenecientes á las partes de lugar par y la suma de las cifras pertenecientes á las partes de lugar impar es divisible por 7.

Número divisible por 10, cuando termina por 0.

Prueba por 9 (multiplicación).—Dividir por 9 el multiplicando, el multiplicador y el producto. El producto de las restas de la división por 9 del multiplicando y del multiplicador, debe ser igual á la resta de la división por 9 del producto.

Descomposición de un numero en sus factores primos.—Dividirle sucesivamente y tantas veces como sea posible por los divisores primos, comenzando por los más débiles.

Potencia, producto de un número multiplicado por el mismo cierto número de veces.

Exponente.—Cifra que marca cuántas veces ha de tomarse el número como factor.

Máximo común divisor de varios números es igual al producto de sus factores primos comunes á la más débil potencia.

Mínimo común múltiplo de varios números es igual al producto de sus factores primos á la más alta potencia.

Raíz, número que, multiplicado cierto número de veces por sí mismo, produce otro número llamado potencia.

Índice, cifra que marca cuántas veces ha de tomarse el número como factor.

Raíz cuadrada de un número, número que, multiplicado por sí mismo, reproduce el número.

El cuadrado de un número comprende: el cuadrado de las decenas; el doble producto de las decenas por las unidades;

el cuadrado de las unidades. De este principio se deduce el método para

La extracción de la raíz cuadrada de un número mayor que 100. (Véase página 148).

Raíz cúbica de un número, número que, multiplicado tres veces por sí mismo, reproduce el número.

El cubo de un número comprende: el cubo de las decenas; tres veces el producto del cuadrado de las decenas por las unidades; tres veces el producto de las decenas por el cuadrado de las unidades; el cubo de las unidades. De este principio se deduce el método para

La extracción de la raíz cúbica de un número mayor que 1000. (Véase página 148).

Fracción, una ó varias partes de la unidad dividida en cierto número de partes iguales.

Denominador, el número que indica en cuántas partes está dividida la unidad.

Numerador, el número que indica cuántas se toman de esas partes (se escribe sobre el denominador separado por una raya)

Fracción decimal, una ó varias partes de la unidad dividida en fracciones de 10 en 10 veces menores. En la numeración decimal se coloca una coma á la derecha de las unidades, y se escriben sucesivamente á la derecha de la coma las décimas, centésimas, etc.

Número fraccionario, número entero acompañado de una fracción.

Reducción de los enteros ó de los números fraccionarios á fracciones.—Multiplicar los enteros por el denominador dado; si resulta fracción, añadir el numerador al producto.

Reducción de las fracciones á enteros, si ha lugar.—Dividir el numerador por el denominador, el cociente da las unidades; si queda resta, se convertirá en numerador de una fracción que tiene el denominador primitivo.

Reducción de una fracción á su más simple expresión.—Dividir los dos términos por unos mismos números tantas veces como sea posible y hasta que se obtenga una fracción irreductible; ó también dividir los dos términos por su máximo común divisor.

Reducción de fracciones á un mismo denominador.—Multiplicar los dos términos de cada una de ellas por el denominador del otro, sí no hay más que dos fracciones. Si hay más de dos, multiplicar los dos términos de cada una de ellas por el producto de los denominadores de los otros.

Reducción de fracciones al mínimo denominador común, si los denominadores de las fracciones no son primos entre sí.—Buscar entonces su mínimo común múltiplo, que será en ese caso su mínimo denominador común. Para determinar los numeradores, dividir el mínimo común múltiplo por cada denominador, y multiplicar cada numerador por el cociente correspondiente.

Adición y sustracción de las fracciones.—Reducir al mismo denominador, si ha lugar; hacer la suma ó la diferencia de los numeradores; dar á esta suma ó á esta diferencia el denominador común.

Multiplicación de las fracciones.—Multiplicar los numeradores entre sí y los denominadores también entre sí. Si hay un entero cuéntesele como único; si hay números fraccionarios, redúzcanse á fracciones.

División de las fracciones.—Multiplicar la fracción dividendo por la fracción divisor invertida; si hay un entero cuéntesele como único; si hay números fraccionarios, redúzcanse á fracciones.

Observación general.—Una fracción puede ser considerada como la indicación de una división que haya de hacerse.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS sobre la Divisibilidad, las Potencias, las Raíces y las Fracciones

I

Divisibilidad

¿Cuándo se dice que un número es divisible por otro? Dar ejemplos de números divisibles por otros y de números no divisibles por otros.

¿Cuándo se dice que dos números son primos entre sí?

Demostrar que un número divisible por otro es múltiplo de ese otro. Dar ejemplos.

Demostrar que todos los números enteros son divisibles por la unidad y que todos los números son divisibles por sí mismos.

Construir la tabla de los números primos tan extensa como sea posible.

Hacer que construya esta tabla cierto número de alumnos, y medir la velocidad con que la construyen, no para humillar á los que tarden, sino, por el contrario, para demostrarles que con el ejercicio y la atención todo el mundo puede perfeccionarse.

Habituar los alumnos á medir la velocidad con que pueden hacer ejercicios de construcción de tablas y á compararse frecuentemente entre sí, para que puedan *medir su perfeccionamiento*.

Demostrar que todo número que divide otros números divide su suma. Dar ejemplos.

Demostrar que todo número que divide dos números divide su diferencia. Dar ejemplos.

Demostrar que todo número que divide otros números divide sus múltiplos. Dar ejemplos.

¿Cuándo es un número divisible por 2? Dar ejemplos.

¿Cuándo es un número divisible por 5? Dar ejemplos.

¿Cuándo un número es divisible por 4? Dar ejemplos. Tomar números al azar y verificar si son divisibles por 4 por medio de la regla de divisibilidad por 4, después por medio de una división.

Las mismas preguntas respecto de la divisibilidad por 25, por 8, por 125, por 9, por 3, por 6, por 11, por 7, por 10.

¿Cómo se hace la prueba por 9 de una multiplicación? Ejemplos.

¿Cómo se hace la prueba por 9 de una división? Ejemplos.

Hacer la prueba por 3, por 7, por 11 de multiplicaciones y divisiones.

Hallar aplicaciones prácticas de todo lo que precede. Ejemplo: Cierto número de personas quieren organizar una partida de campo y preparan cestos con provisiones para 4 personas. ¿Podrán preparar un número exacto de cestos? ¿Podrán hacerlo si los grupos fueran de 3? de 2? de 5? de 6? de 7? de 8? etc.?

¿Qué se entiende por factores (ó divisores) primos?

Descomponer números tomados al azar en sus factores (ó divisores) primos.

II

Potencias

¿Qué se entiende por potencia de un número? Ejemplos.

¿Qué se entiende por primera, segunda, tercera, cuarta, etc. potencia de un número? por cuadrado? por cubo? por exponente? Ejemplos.

¿Cuál es la primera, la segunda, la tercera, etc. potencia de 1, de 2, de 3, de 4, etc.?

Construir la tabla de las 10 primeras potencias de los 10 primeros números sobre el modelo siguiente:

Números	2.ª Potencia (cuadrado)	3.ª Potencia (cubo)	4.ª Potencia	etc.	etc.
1	...	....	.....	....	
2	...	....	.....	....	
3	...	....	.....	....	
etc.	...	....	.....	....	

reservando en la columna de la segunda potencia el lugar de un número de tres cifras, en la columna de la tercera potencia el lugar de un número de cuatro cifras, en la columna de la cuarta potencia el lugar de un número de cinco cifras, etc., y en la columna de la décima potencia el lugar de un número de once cifras.

Exponer, calculando rápidamente las potencias de 10, la razón de lo que precede.

III

Máximo común divisor y mínimo común múltiplo

¿Qué se entiende por máximo común divisor entre varios números? Hallar ejemplos y efectuar cálculos.

¿Qué se entiende por mínimo común múltiplo? Hallar ejemplos y efectuar cálculos. (Se comprenderá la utilidad de estos cálculos al tratar, por ejemplo, de la simplificación de las fracciones).

IV

Raíces

¿Qué se entiende por raíces? por índice? Ejemplos.

¿Qué se entiende por raíz cuadrada? por raíz cúbica? Ejemplos.

¿Qué se entiende por cuadrado perfecto? por raíz inconmensurable? Ejemplos.

Extraer raíces cuadradas.

Extraer raíces cúbicas.

Extraer una raíz cuarta, una raíz sexta.

Un campo cuadrado tiene cierta superficie. ¿Cuál es la longitud de su lado?

Una casa cuadrada ocupa cierta superficie. ¿Cuál es la longitud de su fachada?

Unos compañeros que cultivan en común un extenso territorio, reciben de un amigo 2916 plantas de lechugas; y quieren plantarlas en hileras de modo que haya tantas plantas por hilera como hileras. ¿Qué número será el de las hileras?

Se ha trazado el plano de una casa calculando que ocupará el solar más largo que ancho (dense cifras). Se cambia de idea y se ve que hay ventaja en que la casa tenga una forma cuadrada aunque ocupando la misma superficie. ¿Cuáles habrán de ser las nuevas dimensiones?

Se quiere recoger en un estanque cúbico el agua de lluvia que caiga sobre un tejado. Se desea que ese recipiente pueda contener cierto número de hectólitros (dese la cifra). ¿Cuáles serán las dimensiones interiores del estanque?

V

Fracciones

¿Qué se entiende por fracción? por denominador? por numerador? por fracción decimal? por número fraccionario?

Enunciar fracciones y números fracciones y hacer que se escriban.

Escribir fracciones y números fraccionarios y hacer que se lean.

Adicionar, sustraer, multiplicar y dividir fracciones y números fraccionarios.

Reducir fracciones al mismo denominador.

Reducir fracciones al mismo denominador común.

Simplificar fracciones.

Convertir fracciones ordinarias en fracciones decimales y recíprocamente.

Demostrar que si se multiplica una fracción por su denominador, se obtiene su numerador.

¿Cómo se hace una fracción 2, 3, 4, etc., veces mayor ó menor?

Demostrar que no se cambia el valor de una fracción multiplicando ó dividiendo sus dos términos por un mismo número.

Demostrar que, añadiendo un mismo número á los dos términos de una fracción, se altera esta fracción y se le acerca á la unidad.

Demostrar que rebajando un mismo número de los dos términos de una fracción, se altera esta fracción y se le aleja de la unidad.

¿En qué se convierte una fracción cuyo numerador se aumenta? ¿En qué se convierte aquélla cuyo denominador se aumenta?

¿En qué se convierte una fracción cuyo numerador se disminuye? ¿En qué se convierte aquélla cuyo denominador se disminuye?

Se llama *fracción irreducible* aquella cuyos dos términos son inferiores á los dos términos correspondientes de toda fracción equivalente. Demostrar que los dos términos de una fracción irreducible son primos entre sí.

¿Qué fracción de siglo, de año, de mes, de semana, de día, representan 1 hora, 2 horas, 3 horas, etc.?

¿Por qué $\frac{1}{4}$ es mayor que $\frac{1}{5}$?

Escribir cierto número de fracciones, clasificarlas después por orden de grandor.

¿Qué ha de añadirse á $\frac{243}{647}$ para obtener una unidad?

¿Cuántas unidades y fracciones de unidad hay en $\frac{49}{14}$? Expresar las fracciones de unidad bajo la forma más sencilla.

Un recipiente de forma cilíndrica contiene, estando lleno, 477 litros. Se mide la altura del líquido que contiene en un momento dado, y se ve que esa altura representa los $\frac{7}{9}$ de la altura total, lo que significa que ese recipiente, dada su forma, contiene los $\frac{7}{9}$ de su capacidad total. ¿Cuántos litros representan esos $\frac{7}{9}$?

Pablo quiere construir un palomar: para ello necesita 30 horas de trabajo. Ahora bien, cada día de 24 horas duerme $\frac{1}{3}$ del tiempo y se instruye durante otro tercio. Si comienza el palomar el 1.° de agosto, ¿cuándo lo terminará?

¿Cuándo lo habrá terminado si además pierde $\frac{2}{12}$ del tiempo en dejarse distraer?

¿Cuándo lo habrá terminado si trabaja todos los días regularmente los $\frac{3}{4}$ de su tiempo disponible, comenzando á las cinco y media de la mañana?

Un pintor ha de pintar una pared. El primer día pinta $\frac{1}{4}$, el día siguiente $\frac{6}{13}$, dos días después $\frac{31}{52}$. ¿Qué porción de pared le queda que pintar?

Multiplicar un número no significa necesariamente aumentarle. En efecto, multiplicar, por ejemplo, 4 por $\frac{1}{2}$ significa *tomar* 4 *la mitad de una vez.* Tomar 4 una vez $= 4$; y tomar 4 la mitad de una vez$=2$.

Demostrar por ejemplos que el producto de un número por una fracción es mayor que ese número si la fracción es mayor que la unidad; y menor que este número si la fracción es menor que la unidad.

Carlos quiere plantar 23 árboles y se pone á cavar 23 hoyos. Calcula que en una hora cava un hoyo y la cuarta parte de otro. ¿Cuánto tiempo empleará en cavar todos? ¿Cuánto tiempo habrá de dedicar diariamente si quiere acabar en tantos días?

Cuando haya que hacer cierto trabajo, los alumnos deberán habituarse á señalarse tareas, si quieren hacer el trabajo en un tiempo determinado. Deberán darse cuenta del tiempo que habrán de dedicar cada día á determinado trabajo si quieren hacerle en 5 días, 6 días, 7 días, etc., lo que representa cada día $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$, etc., del trabajo.

Pedro hace cierto trabajo en 3 horas. Alfonso hace el mismo trabajo en 4 horas. ¿Qué porción de trabajo harán en una hora si trabajan juntos? Razonamiento: Pedro, en una hora, $\frac{1}{3}$ de trabajo; Alfonso, en una hora, hace $\frac{1}{4}$ de trabajo. En 1 hora harán $\frac{1}{3} + = ...$

El mismo razonamiento se aplica si se trata de calcular la porción de un estanque que llenarán ó vaciarán dos grifos abiertos juntos, sabiendo que cada grifo emplea tanto tiempo en llenar ó vaciar el estanque.

El mismo razonamiento se aplica á calcular lo que consumirían juntos y por hora cierto número de mecheros de gas que consumieran cada uno tanto gas en tantas horas, etc., etc.

Habituar á los alumnos á tomar las reglas de la teoría, y á plantear por sí mismos problemas de aplicación. No hay inconveniente en dejarles consultar á este efecto recopilaciones de problemas. Es bueno acostumbrarse á modificar los nombres dados como ejemplos. Conviene también señalarles los errores contenidos en los libros en uso, tanto desde el punto de vista de las relaciones entre los hombres, como respecto á lo que concierne á los datos experimentales de la aritmética.

CUARTA PARTE

Relaciones, proporciones, progresiones, logaritmos, regla de tres, repartos proporcionales, etc.

En las aritméticas actuales se dedica una parte importante á las operaciones financieras (interés, descuento, etc). Por nuestra parte indicaremos sólo esas operaciones en las cuales los hombres pierden mucho tiempo en la sociedad actual. En una sociedad razonable, el cálculo se utilizará, no con un fin comercial, sino en vista de la organización de la felicidad (satisfacción de las necesidades con el mínimo de esfuerzo).

Relación

Hemos explicado en otro lugar y aquí mismo que una relación resulta de una comparación. No hay más medio de comprender por qué caracteres se parecen ó se diferencian dos objetos, que aproximando el uno al otro. En esa aproximación consiste la *comparación*. Una vez aproximados los objetos, se pueden percibir las semejanzas ó las diferencias que resulten de su comparación. La anotación mental, hablada ó escrita, del resultado de una comparación ó, más sencillamente, el resultado de una comparación de objetos se llama la *relación* de los objetos.

Como la aritmética estudia los números, nos ocuparemos aquí de la relación entre los números, y llamaremos *relación* entre dos números al resultado de la comparación de esos dos números.

Así pues, como consecuencia de lo que precede, para comprender la semejanza ó la diferencia de dos números, conviene aproximar el uno al otro, y la manera más sencilla de anotar esa aproximación (comparación) consiste en escribir los dos números, uno al lado de otro (**relación**), de manera que bajo la manera más sencilla, la relación entre dos números no es más que su yuxtaposición.

Relación aritmética

Una vez colocados los dos números uno al lado del otro, se puede percibir fácilmente cuál es mayor y cuál es menor, y muy naturalmente acude la idea de descubrir cuánto excede el mayor al menor (diferencia).

La relación expresada bajo la forma de diferencia (sustracción) se llama *relación por diferencia* ó *relación aritmética*.

Ejemplo. Si comparo 21 con 3, extrayendo 3 de 21, diré que la relación por diferencia ó la relación aritmética entre 21 y 3 es 21 menos 3, que escribiré 21 — 3. También podré decir, efectuando la sustracción, que la relación aritmética entre 21 y 3 es su diferencia, es decir, 18.

Relación geométrica

Habiendo comparado así 21 y 3 y anotado su diferencia 18, puedo tratar de comprender aún de otro modo el resultado de la comparación (relación) investigando cuántas veces 3 está contenido en 21 (lo que es otra manera de descubrir cuánto excede 21 de 3).

Una relación expresada bajo esta forma (división) se llama *relación por cociente* ó *relación geométrica*, ó sencillamente *relación*.

Observaciones.—Como la división es una operación aritmética, no ha de considerarse lógica la división por cociente como no aritmética, por oposición á la relación por diferencia, que sería aritmética. Eso es tanto menos lógico, cuanto que la división, como sabemos, es un caso particular de la sustracción.

Sin embargo, la relación por cociente es muy usada en geometría, y aunque la relación por diferencia pueda serlo igualmente, se ha establecido el uso de reservar el nombre de relación geométrica á la relación por cociente.

Ejemplo. Si comparo 21 con 3, dividiendo 21 por 3, diré que la relación por cociente, ó la relación geométrica entre 21 y 3 es 21 dividido por 3, que escribiré $\frac{21}{3}$ ó 21 : 3. Efectuando la división también podré decir que la relación geométrica entre 21 y 3 es su cociente, es decir, 7.

Refiriéndonos á cuanto hemos dicho acerca de las fracciones, se ve que las relaciones geométricas pueden ser consideradas como fracciones, y que todas las reglas que se aplican á las fracciones se aplican á las relaciones geométricas. Por ejemplo, lo mismo que las fracciones, las relaciones no cambian de valor cuando se multiplica ó se dividen los dos términos por un mismo número.

Observaremos de paso que una relacion aritmética no cambia cuando se añade ó sustrae un mismo número á sus dos términos, Sabemos, en efecto, que la suma ó la diferencia entre dos números no se modifica cuando se añade ó se sustrae un mismo número á cada uno de esos dos números.

Nos ocuparemos aquí principalmente de las relaciones por cociente, y, siguiendo la costumbre, convendremos en llamarlas sencillamente relaciones. Tendremos cuidado, cuando se trata de las otras, de servirnos del término «relaciones aritméticas.»

Observaremos además que la noción de relación es en extremo general. Un número es una relación consiguiente á la comparación del conjunto de las unidades de una pluralidad con una de esas unidades. Acabamos de ver que el resultado de la comparación de un número con otro número podría ser expresada por una relación. Por último, de una manera general, una relación puede representarse siempre en forma de fracción cuyos términos (numerador y denominador) pueden ser enteros, fracciones ó fraccionarios, pudiendo siempre volver los dos términos á ser enteros, lo que simplifica los cálculos.

Ejemplo. La relación de $\frac{4}{5}$ á $\frac{6}{7}$ es $\frac{\left(\frac{4}{5}\right)}{\left(\frac{6}{7}\right)}$ ó $\frac{4}{5} : \frac{6}{7}$.

Observo que se trata en el caso presente de dividir una fracción por otra fracción, y bastará para multiplicar la fracción dividendo por la fracción divisor al revés. Tendré, pues

$$\frac{\left(\frac{4}{5}\right)}{\left(\frac{6}{7}\right)} = \frac{4 \times 7}{5 \times 6} = \frac{28}{30}$$

que puedo simplificar todavía dividiendo los 2 términos por 2, y tendré en definitiva la relación de $\frac{4}{5}$ á $\frac{6}{7} = \frac{14}{15}$

Proporción

Se llama *proporción* la expresión de la igualdad de dos relaciones.

Ejemplo:

$\frac{16}{4} = \frac{12}{3}$, que se puede escribir también $16 : 4 :: 12 : 3$ y que se lee «dieciséis es á cuatro como doce es á tres,» ó «dieciséis cuartos son iguales á doce tercios,» ó «dieciséis sobre cuatro son iguales á doce sobre tres.»

Estas dos relaciones son iguales, porque dan el mismo cociente, y la expresión de su igualdad es una proporción.

Se puede expresar también la igualdad de dos relaciones aritméticas. En ese caso nos hallamos ante, no de un *equi-cociente*, sino de una *equi-diferencia* ó de una *proporción aritmética*.

Ejemplo, $10 - 4 = 9 - 3$, que se puede escribir igualmente $10 \cdot 4 : 9 \cdot 3$, y que se lee «diez menos cuatro es igual á nueve menos tres,» ó «diez es á cuatro como nueve es á tres.»

Estas dos relaciones aritméticas son iguales, porque dan la misma resta, y la expresión de su igualdad es una proporción aritmética.

Si se consideran los 4 términos 10, 4, 9 y 3, el primer término de cada relación se llama *antecedente* y el segundo término de cada relación *consiguiente*. Así 10 y 9 son los antecedentes; 4 y 3, los consiguientes; ó de otro modo, se llaman antecedentes el primer y el tercer términos de una proporción, y consiguientes, el segundo y cuarto términos.

Se llaman *extremos* el primero y el cuarto términos de una proporción, es decir, los que ocupan el primero y el último lugar; se llaman *medios* el segundo y el tercer términos, es decir, los dos términos comprendidos entre el primero y el último. Así 10 y 3 son los dos extremos; 4 y 9, los medios.

Del mismo modo, en la proporción geométrica $16 : 4 :: 12 : 3$, 16 y 12 son los antecedentes; 4 y 3, los consiguientes; 16 y 3, los extremos; y 12 y 4, los medios.

En una proporción aritmética, la suma de los extremos es igual á la suma de los medios.

En efecto, sea la proporción aritmética $10 \cdot 4 : 9 \cdot 3$, añadamos 1 á los 2 términos de la segunda relación aritmética, lo que no cambiará su valor; tendremos

$$(9 + 1) - (3 + 1) \text{ ó } 10 \cdot 4 : 9 \cdot 3$$

En una proporción geométrica (que llamaremos también simplemente «proporción») el producto de los extremos es igual al producto de los medios.

En efecto, sea la proporción $16 : 4 :: 12 : 3$; reduzcamos las dos relaciones $\frac{16}{4}$ y $\frac{12}{3}$ al mismo denominador, y tendremos

$$\frac{16 \times 3}{4 \times 3} = \frac{12 \times 4}{3 \times 4} \text{ ó } \frac{48}{12} = \frac{48}{12}$$

Ahora bien, reduciendo al mismo denominador, no hemos cambiado el valor de las relaciones; hemos hecho el producto de los extremos 16 y 3, lo mismo que el producto de los medios 4 y 12, y hemos hallado estos productos (48) iguales.

Esa propiedad de las proporciones es fundamental. Tiene, como veremos después, una consecuencia en extremo importante, á saber: que conociendo tres términos de una proporción, se puede hallar el cuarto.

Tiene también esta consecuencia: que en una proporción se puede invertir el orden de los extremos, ó el orden de los medios, así como se pueden poner los medios en el lugar de los extremos y recíprocamente (el producto de los extremos y el de los medios no siendo modificado por esos cambios de lugar).

Se llama *cuarta proporcional* á tres números el cuarto término de una proporción cuyos tres números son los tres primeros términos. Se ve, según lo que hemos dicho anteriormente, que se puede siempre hacer pasar un término cualquiera al cuarto lugar.

Se llaman *proporciones continuas* unas proporciones en las cuales los dos medios son iguales. Uno de estos dos medios iguales es llamado *medio proporcional* ó *tercera proporcional*.

Ejemplos:

$$10 \cdot 7 : 7 \cdot 4$$
$$32 : 8 :: 8 \cdot 2$$

En estas proporciones los medios proporcionales son 7 para la primera proporción y 8 para la segunda.

Si se trata de la proporción aritmética, la tercera proporcional ó *mediana proporcional aritmética* es también llamada *medio diferencial,* y observamos que en ese caso ese medio diferencial es igual á la semisuma de los dos extremos.

Así, en la proporción $10 \cdot 7 : 7 \cdot 4$, el medio proporcional es $7 = \frac{10 + 4}{2}$.

Resulta de lo que precede, que, en una proporción aritmética, se puede calcular la cuarta proporcional desconocida, rebajando de la suma de los medios, el extremo conocido, y que, en una proporción aritmética continua, se puede calcular la tercera proporcional desconocida, tomando la mitad de la suma de los medios conocidos.

Ejemplos:

Sea $10 \cdot 4 : 9 \cdot x$, siendo x un número desconocido, haremos la suma de $4 + 9 = 13$, y, rebajando 10 de esta suma, tendremos la cuarta proporcional aritmética 3 buscada.

Sea $10 \cdot x : x \cdot 4$, siendo x un número desconocido, haremos la suma de los extremos $10 + 4 = 14$, y la mitad de esta suma, 7, nos dará la tercera proporcional aritmética buscada.

Si se trata de proporciones geométricas, nos será igualmente fácil de calcular, sea una cuarta proporcional, sea una tercera proporcional desconocidas.

En efecto, sabiendo que el producto de los extremos es igual al producto de los medios, bastará para calcular la cuarta proporcional (extremo desconocido) dividir el producto de los medios conocidos por el extremo conocido.

Sea la proporción $16 : 4 :: 12 : x$, siendo x un número desconocido, haremos el producto de los medios 4 y 12 y tendremos $4 \times 12 = 48$, y dividiremos este producto por el extremo conocido 16, lo que nos dará el valor de $x = 3$.

En efecto, en la proporción $\frac{16}{4} = \frac{12}{x}$, sé que el producto de los extremos es igual al producto de los medios, tengo pues

$$16 \times x = 4 \times 12 \text{ ó } 16 \times x = 48$$

Si 16 veces $x = 48$, una vez x valdrá 16 veces menos ó $\frac{48}{16}$ ó 3, de donde $x = 3$.

Si se trata de una proporción geométrica continua, se puede calcular la tercera proporcional desconocida, tomando la raíz cuadrada del producto de los dos extremos conocidos.

Sea la proporción $32 : x :: x : 2$, siendo x un número desconocido, haremos el producto de $32 \times 2 = 64$ y tomaremos la raíz cuadrada de este producto, es decir, la raíz cuadrada de 64, que es 8 y que es la tercera proporcional buscada.

En efecto, en la proporción $32 : x :: x : 2$, siendo el producto de los extremos igual al producto de los medios, se tiene

$$32 \times 2 = x \times x, \text{ ó } 64 = x^2$$

Se sigue de ahí que, siendo 64 el cuadrado de x la raíz cuadrada del cuadrado de x (ó x) será igual á la raíz cuadrada de 64.

$$x = \sqrt{64} = 8$$

Observación. — En las proporciones continuas, siendo los dos medios iguales, podemos contentarnos con escribirlos una vez. En este caso se hacen preceder las proporciones del signo $\div$ si son aritméticas, y del signo $\because$ si son geométricas.

Ejemplo. Las dos proporciones

$$4 \cdot 7 : 7 \cdot 10$$
$$2 : 8 :: 8 : 32$$

pueden escribirse

$$\div\ 4 \cdot 7 \cdot 10$$
$$\because\ 2 : 8 : 32$$

En este caso se leerán estas dos proporciones como sigue:

Como cuatro es á siete, es á diez.

Como dos es á ocho, es á treinta y dos.

Otra observación. — En las proporciones anteriores, 7 y 8 son respectivamente terceras proporcionales ó medias proporcionales aritmética y geométrica de los números 4 y 10, 2 y 32. Se pueden generalizar las reglas que hemos dado para buscar las terceras proporcionales, y, en lugar de decir

La tercera proporcional se calcula en una proporción aritmética continua, tomando la mitad de la suma de los extremos; y en una proporción geométrica continua, tomando la raíz cuadrada del producto de los dos extremos.

Puede decirse:

La media proporcional aritmética entre dos números es igual á la semi-suma de esos números; la media proporcional entre dos números es igual á la raíz cuadrada de su producto.

Sucesión de relaciones iguales

En lugar de considerar una proporción, es decir, dos relaciones iguales, se puede ser conducido á considerar una sucesión de relaciones iguales, por ejemplo, $\frac{3}{2} = \frac{6}{4} = \frac{9}{6} = \frac{18}{12}$, etc., etc.

En una sucesión de relaciones iguales, la suma de un número cualquiera de antecedentes (numeradores) es á la suma de sus consiguientes (denominadores) como el antecedente de una de las relaciones es á su consiguiente.

Sean las relaciones iguales anteriores, digo que, por ejemplo,

$$\frac{6+9+18}{4+6+12} = \frac{6}{4}$$

En efecto, sabemos que no se cambia el valor de una fracción ó de una relación multiplicando sus dos términos por un mismo número, y, si consideramos las fracciones $\frac{3}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{3}{2}$

tendremos $\frac{3}{2} = \frac{3 \times 3}{2 \times 3} = \frac{3+3+3}{2+2+2}$

Luego, si considero las fracciones $\frac{6}{4}$, $\frac{9}{6}$, $\frac{18}{12}$, puedo volver todas á su más simple expresión $\frac{3}{2}$ y escribir $\frac{6}{4} = \frac{3+3}{2+2}$, $\frac{9}{6} = \frac{3+3+3}{2+2+2}$, $\frac{18}{12} = \frac{3+3+3+3+3+3}{2+2+2+2+2+2}$ y puedo entonces darme cuenta fácilmente de que $\frac{6+9+18}{4+6+12} = \frac{6}{4}$, reemplazando simplemente 6, 9 y 18 por 2 veces 3, 3 veces 3, 6 veces 3, y reemplazando 4, 6 y 12 por 2 veces 2, 3 veces 2 y 6 veces 2.

Las sucesiones de relaciones iguales, lo mismo que las proporciones, tienen además otras propiedades, que pueden ser objeto de un estudio detallado.

Progresiones

Hemos visto que, siendo todos los medios iguales en una proporción continua, podemos contentarnos con escribirlos una sola vez, y que, por ejemplo,

$$4 \,.\, 7 : 7 \,.\, 10$$
$$2 : 8 :: 8 : 32$$

pueden escribirse

$$\div\, 4 \,.\, 7 \,.\, 10$$
$$\div\!\!\div\, 2 : 8 : 32$$

Se observará que, en la proporción aritmética continua $\div\, 4 \,.\, 7 \,.\, 10$, la diferencia entre los términos consecutivos es la misma. En efecto, $7 - 3 = 4$ y $10 - 7 = 4$. Se observará que en la proporción geométrica continua $\div\!\!\div\, 2 : 8 : 32$, el cociente de los términos consecutivos es el mismo. En efecto, $\frac{8}{2} = 4$ y $\frac{32}{8} = 4$.

Si se supone una serie de relaciones iguales siguiéndose en proporciones continuas, es decir, una sucesión de números cada uno de los cuales es mediana proporcional entre el precedente y el siguiente, esta sucesión de números se llamará una *progresión.*

Se ve inmediatamente que pudiendo ser consideradas las progresiones como una sucesión de relaciones iguales, estas relaciones pueden ser aritméticas ó geométricas, y, por consiguiente, las progresiones pueden ser también aritméticas ó geométricas.

En consecuencia, se llama *progresión por diferencia* ó *progresión por aritmética*, una sucesión de términos, cada uno de los cuales excede al precedente ó es excedido por él un mismo número llamado *diferencia* ó *razón*.

Se llama *progresión por cociente* ó *progresión geométrica* una sucesión de términos cada uno de los cuales contiene el precedente, ó está en él contenido, un mismo número de veces, cuyo número de veces, es llamado *cociente* ó *razón*. Ejemplos:

÷ 2 . 4 . 6 . 8 . 10 progresión aritmética.
÷ 2 : 4 : 8 : 16 : 32 progresión geométrica.

Estas dos progresiones, la una aritmética y la otra geométrica, tienen por razón 2. En efecto, en la primera tenemos $4 - 2 = 2$, $6 - 4 = 2$, etc., y en la segunda $4 : 2 = 2$, $8 : 4 = 2$, etc.

Una progresión se llama *creciente* si sus términos van aumentando; se llama *decreciente* si sus términos van disminuyendo.

Así las progresiones

÷ 2 . 4 . 6 . 8 . 10
÷ 10 . 8 . 6 . 4 . 2

son, la primera, una *progresión aritmética creciente;* la segunda, una *progresión aritmética decreciente.*

Las progresiones

∺ 2 : 4 : 8 : 16 : 32
∺ 32 : 16 : 8 : 4 : 2

son, la primera, una *progresión geométrica creciente;* la segunda, una *progresión geométrica decreciente.*

Basta examinar unas progresiones aritméticas ó geométricas para darse cuenta de que pueden ser consideradas como una sucesión de relaciones iguales.

En efecto, las progresiones

÷ 10 . 8 . 6 . 4 . 2
∺ 32 : 16 : 8 : 4 : 2

que se leen

como 10 es á 8, es á 6, es á 4, etc.
como 32 es á 16, es á 8, es á 4, etc.

pueden leerse

10 es á 8 como 8 es á 6, como 6 es á 4, etc.
32 es á 16 como 16 es á 8, como 8 es á 4, etc.

y podrán escribirse

$$10 - 8 = 8 - 6 = 6 - 4, \text{ etc.}$$

$$\frac{32}{16} = \frac{16}{8} = \frac{8}{4} \text{ etc.}$$

Puede, pues, decirse, que cada término de una progresión es á la vez antecedente y consiguiente, excepto el primer término, que es sólo antecedente, y el último, que es sólo consiguiente.

Propiedades de las progresiones

Indicaremos aquí las principales.

1.° *En una progresión aritmética creciente ó decreciente, un término cualquiera es igual al primero más ó menos tantas veces la razón que hay de términos antes del término considerado.*

En una progresión geométrica creciente ó decreciente, un término cualquiera es igual al primero multiplicado ó dividido por la razón elevada á una potencia indicada por el número de los términos que preceden al término considerado.

En efecto, en una progresión aritmética creciente ó decreciente, siendo cada término mayor ó menor que el precedente de una vez la razón, un término cualquiera es igual al primero más ó menos tantas veces la razón que hay de términos antes que él.

Así en las progresiones

$$\div\ 2 \,.\, 4 \,.\, 6 \,.\, 8 \,.\, 10$$
$$\div\ 10 \,.\, 8 \,.\, 6 \,.\, 4 \,.\, 2$$

el término 10 = el primer término 2 + 4 veces la razón 2;

el término 2 = el primer término 10 — 4 veces la razón 2.

En una progresión geométrica creciente ó decreciente, siendo cada término igual al precedente multiplicado ó dividido por la razón; un término cualquiera es igual al primero multiplicado ó dividido por tantas veces la razón que hay de términos antes del término considerado, (es decir, multiplicado ó dividido por la razón elevado á una potencia indicada por el número de los términos que preceden al término considerado).

Así en las progresiones

$$\div 2 : 4 : 8 : 16 : 32$$
$$\div 32 : 16 : 8 : 4 : 2$$

el término 32 = el primer término 2 × la razón 2 á la 4.ª potencia;

el término 2 = el primer términr 32 : la razón 2 á la 4.ª potencia.

2.º *Se halla la razón de una progresión aritmética, dividiendo la diferencia de los extremos por el número de los términos menos uno.*

Se halla la razón de una progresión geométrica, dividiendo el extremo mayor por el menor y extrayendo del cociente una raiz de un grado igual al número de los términos menos uno.

En efecto, en una progresión aritmética, en consecuencia de lo que hemos demostrado, el término más elevado es igual al más bajo más tantas veces la razón que hay de términos menos uno. Si, pues, del término más elevado, rebajamos el más bajo, nos quedará una diferencia que representará tantas veces la razón que hay de términos menos uno; y si dividimos esta diferencia por el número de términos menos uno, tendremos la razón.

Así en la progresión $\div 2 . 4 . 6 . 8 . 10$ la razón

$$2 = \frac{8,\ \text{diferencia entre los extremos 10 y 2}}{4,\ \text{número de los términos menos uno}}.$$

En una progresión geométrica, en consecuencia de lo que hemos demostrado, el término más elevado es igual al más bajo multiplicado por la razón elevada á una potencia indicada por el número de los términos menos uno. Si, pues, dividimos el término más elevado por el más bajo, tendremos un cociente que representará una potencia de la razón indicada por el número de términos menos 1; y si rebajamos de ese cociente una raíz de un grado igual al número de términos menos uno, tendremos la raíz.

3.° Se demuestra igualmente que:

Se halla la suma de los términos de una progresión aritmética, multiplicando la semi-suma de los extremos por el número de los términos.

Se halla la suma de los términos de una progresión geométrica, rebajando el término menor del producto del término mayor por la razón y dividiendo el resto por la razón menos uno.

4.° Se puede también aprender á *hallar el número de los términos de una progresión,* conociendo los extremos y la razón.

5.° Y se puede demostrar que es posible *insertar entre dos términos dados un número cualquiera de terminos medios.*

Hablando de las progresiones, hemos querido señalar solamente aquí algunas de las propiedades que permitirán darse cuenta de las ventajas que pueden sacarse de este estudio para la simplificación de los cálculos.

Antes de decir algunas palabras de los logaritmos, conviene recordar brevemente la sucesión de las combinaciones que á ellos conducen.

Ante todo hemos comparado una *unidad* á la *pluralidad* de que forma parte. El resultado de esta comparación (relación) es un *número*, y esto nos ha conducido á dar nombres á los números.

En seguida hemos comparado los números entre sí, y el resultado de esta comparación nos ha conducido á la idea de *relación por diferencia (relación aritmética)* y de *relación por cociente (relación geométrica)*.

A continuación hemos comparado las relaciones entre sí y hemos sido conducidos á estudiar el conjunto de dos relaciones iguales (proporción); y siguiendo la naturaleza de las relaciones, nos hemos hallado ante *proporciones aritméticas* y *proporciones geométricas*.

Por último, hemos comparado una proporción aritmética con otra proporción aritmética y una proporción geométrica con otra proporción geométrica y hemos llegado al estudio de las sucesiones de proporciones ó *progresiones;* nos hemos hallado ante *progresiones aritméticas* y *progresiones geométricas*.

Vamos ahora á comparar las progresiones aritméticas con las progresiones geométricas, y llegamos al estudio de los *logaritmos*.

Logaritmos

Se llama logaritmo (del griego LOGOS=*discurso* y ARITHMOS=*número)* un término de una progresión aritmética correspondiente á un término de una progresión geométrica, de los cuales los otros términos corresponden respectivamente, término á término, á los otros términos de la progresiones geométricas.

Así en las progresiones

$$\div\ 2 \,.\, 4 \,.\, 6 \,.\, 8 \,.\, 10 \,.\, 12$$
$$\dot{\dot{\div}}\ 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64$$

2 es el logaritmo de 2, 6 es el logaritmo de 8, 10 es el logaritmo de 32, etc.

Esto indica que un número puede tener una cantidad indefinida de logaritmos diferentes; porque si se le considera como formando parte de una progresión geométrica, siempre puede hacerse corresponder una cantidad indefinida de progresiones aritméticas á esta progresión geométrica; del mismo modo que se puede hacer corresponder á una progresión aritmética dada una cantidad indefinida de progresiones geométricas.

Napier, en 1614, señaló las propiedades de los logaritmos, y nos será fácil comprender su importancia si nos damos cuenta que á las adiciones y sustracciones de las progresiones aritméticas corresponden las multiplicaciones y divisiones de las progresiones geométricas, y que á las multiplicaciones y divisiones de las progresiones aritméticas corresponden las elevaciones á las potencias y las extracciones de raíces de las progresiones geométricas.

Sean, por ejemplo, las progresiones

$$\div\ 2\ .\ 4\ .\ 6\ .\ 8\ .\ 10\ .\ 12$$
$$\because\ 2:4:8:16:32:64$$

Veo que

en la progresión aritmética $2 + 4 = 6$;
en la progresión geométrica $2 \times 4 = 8$;
y que 6 es el logaritmo de 8.

Esta sencilla observación permite reemplazar en los cálculos las multiplicaciones y las divisiones por adiciones y sustracciones, y reemplazar las elevaciones á potencias y las extracciones de raíces por multiplicaciones y divisiones.

Ejemplos:

Sea multiplicar 4 por 8 por medio de las dos progresiones anteriores.

Adiciono los logaritmos de 4 y de 8, y tengo

$4 + 6 = 10$; miro cuál es el número del cual 10 es el logarítmo, ó, dicho de otro modo, á qué número de la progresión geométrica corresponde 10, veo que este número es 32 y concluyo $4 \times 8 = 32$.

Sea dividir 32 por 4: haré la operación inversa, á saber: tomaré los logaritmos de 32 y de 4, que son respectivamente 10 y 4, rebajaré 4 de 10, lo que me dará 6; leeré en frente de 6 la cifra 8; y concluiré $32 : 4 = 8$.

Se puede demostrar y verificar experimentalmente la exactitud de las reglas siguientes:

Para multiplicar por medio de los logaritmos, conviene sumar los logaritmos del multiplicando y del multiplicador, y la suma obtenida representa el logaritmo del producto.

Para dividir por medio de los logaritmos, conviene restar el logaritmo del divisor del dividendo, y la resta obtenida representa el logaritmo del cociente.

Para hallar una potencia de un número por medio de logaritmos, conviene multiplicar el logaritmo del número por el grado de la potencia á que se quiere elevar el número, y el producto obtenido representa el logaritmo del número elevado á la potencia buscada.

Para hallar una raíz de un número por medio de los logaritmos, conviene dividir el logaritmo de este número por el grado de la raíz que se quiere extraer, y el cociente obtenido representa el logaritmo de la raíz buscada.

Observemos de paso que pudiendo ser considerada una fracción como la indicación de una división que ha de efectuarse, podemos, en vista de lo que precede, encontrar el logaritmo de una fracción.

Para encontrar el logaritmo de una fracción, conviene rebajar el logaritmo det denominador del logaritmo del numerador.

Tablas de logaritmos

Hemos visto que se puede hacer corresponder una cantidad indefinida de progresiones aritméticas y geométricas entre sí. Sin embargo, en las tablas habitualmente usadas, las progresiones escogidas son la progresión aritmética ÷ 0 . 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . etc., que representa la sucesión de los números en el sistema de numeración decimal, y la progresión geométrica ∷ 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : 100000 : etc., que representa las potencias de 10. De esa manera se tienen tablas de logaritmos de base decimal. Briggs, en 1624, publicó la primera tabla construída á base decimal. Desde esta época se han construído diferentes tablas, cada vez más completas y más cómodas. Citaremos las tablas de Callet (1795), las de Lalande, Marie, etc. Tarnier hizo en 1853 una teoría de los logaritmos.

Los servicios prestados por los logaritmos son innumerables, y entre ellos señalaremos su empleo en astronomía, que evitan considerables pérdidas de tiempo, permiten suprimir años de cálculos pesados y llegar rápidamente á resultados correctos.

Si se comparan las dos progresiones

÷ 0 . 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . etc.
∷ 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : 100000 : etc.

se ve que es indispensable insertar números entre 1 y 10, entre 10 y 100, entre 100 y 1000, etc., y se observa que todos los números de 1 á 10 tendrán por logaritmo 0 más una fracción; que todos los números entre 10 y 100 tendrán por logaritmo 1 más una fracción; que todos los números de 100 á 1000 tendrán por logaritmo 2 más una fracción; etc.; de manera que un número tendrá por logaritmo una parte entera y una parte fraccionaria. La parte entera se llama *característica.*

No entraremos aquí en el detalle de la construcción de las tablas de logaritmos; indicaremos solamente que podemos concebir fácilmente esta construcción si recordamos que es siempre posible insertar entre dos términos de una progresión un número cualquiera de términos medios.

Señalemos, por último, una definición que se da de los logaritmos y que resulta de la comparación de dos progresiones como estas

$$\div\ 0 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \text{etc.}$$

$$\div\div\ 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : 100000 : \text{etc.}$$

La primera de estas progresiones representa la sucesión de los números de la numeración decimal, y la segunda representa potencias de 10; de manera que los términos de la primera indican las potencias de 10 de los términos correspondientes de la segunda. Puede, pues, decirse

El logaritmo de un número dado es el exponente de la potencia á la que ha de elevarse cierto número invariable para producir el número dado.

Así el logaritmo de 1000 es el exponente (3) de la potencia á que ha de elevarse 10 (número invariable) para producir 1000.

El número invariable ó razón de la progresión geométrica es también llamado *base*. En el caso que nos ocupa, la base es 10. Sabemos que podría tomarse cualquiera otra base.

Los logaritmos de los números pueden ser considerados como los exponentes de las potencias á las cuales ha de elevarse cierto número invariable para producir esos números; se puede, por consiguiente, en el estudio de los logaritmos, considerar los números como otras tantas potencias diferentes de 10.

Estas potencias están calculadas con una aproximación mayor ó menor. Ciertas tablas permiten 5, 6, 7 decimales ó más aún.

Sabemos que la cifra que precede á los decimales y que se llama la característica es fácil de calcular, pues es igual á la cantidad de las cifras del número menos uno. No hay, pues, inconveniente en suprimir las características en las tablas. Haciendo variar la característica se obtienen logaritmos de números 10, 100, 1000, 10000 veces etc. mayores ó menores.

Sin entrar aquí en el detalle del mecanismo de las tablas de logaritmos en uso, creemos, sin embargo, interesante familiarizar los alumnos con el empleo de los logaritmos. Al efecto damos á continuación los logaritmos de los números de 1 á 10 con 5 decimales, lo que permitirá efectuar ejercicios del género de los que indicaremos al fin de esta cuarta parte.

Logaritmos de los números de 1 á 10

Números	Logaritmos	Números	Logaritmos
1	0 . 00000	11	1 . 04139
2	0 . 30103	12	1 . 07918
3	0 . 47712	13	1 . 11394
4	0 . 60206	14	1 . 14613
5	0 . 69897	15	1 . 17609
6	0 . 77815	16	1 . 20412
7	0 . 84510	17	1 . 23045
8	0 . 90309	18	1 . 25527
9	0 . 95424	19	1 . 27895
10	1 . 00000	20	1 . 30103

21	1 . 32222	31	1 . 49136
22	1 . 34242	32	1 . 50515
23	1 . 36173	33	1 . 51851
24	1 . 38021	34	1 . 53148
25	1 . 39794	35	1 . 54407
26	1 . 41497	36	1 . 55630
27	1 . 43136	37	1 . 56820
28	1 . 44716	38	1 . 57878
29	1 . 46240	39	1 . 59106
30	1 . 47712	40	1 . 60206
41	1 . 61278	51	1 . 70757
42	1 . 62325	52	1 . 71600
43	1 . 63347	53	1 . 72428
44	1 . 64345	54	1 . 73239
45	1 . 65321	55	1 . 74036
46	1 . 66276	56	1 . 74819
47	1 . 67210	57	1 . 75587
48	1 . 68124	58	1 . 76343
49	1 . 69020	59	1 . 77085
50	1 . 69897	60	1 . 77815
61	1 . 78533	71	1 . 85126
62	1 . 79239	72	1 . 85733
63	1 . 79934	73	1 . 86332
64	1 . 80618	74	1 . 86923
65	1 . 81291	75	1 . 87506
66	1 . 81954	76	1 . 88081
67	1 . 82607	77	1 . 88649
68	1 . 83251	78	1 . 89209
69	1 . 83885	79	1 . 89763
70	1 . 84510	80	1 . 90309

81	1 . 90849	91	1 . 95904
82	1 . 91381	92	1 . 96379
83	1 . 91908	93	1 . 98848
84	1 . 92428	94	1 . 97313
85	1 . 92942	95	1 . 97772
86	1 . 93450	96	1 . 98227
87	1 . 93952	97	1 . 98677
88	1 . 94448	98	1 . 99123
89	1 . 94939	99	1 , 99564
90	1 . 95424	100	2 . 00000

Rsglas de tres

Hemos visto, cuando estudiábamos las proporciones, cómo es posible, conociendo tres términos, hallar el cuarto. Basta, á este efecto, cuando se trata de proporciones geométricas, con dividir el producto de los medios conocidos por el extremo conocido. Esta regla tan sencilla permite resolver todos los problemas en que ha de tenerse en cuenta la proporción de tres cantidades para determinar una cuarta cantidad.

Por ejemplo, dada *cierta cantidad de obreros,* que hacen *cierta cantidad de metros de trabajo* en cierto tiempo, puede preguntarse, dada *otra cantidad de obreros, qué otra cantidad de metros de trabajo* se hará en el mismo tiempo.

Se ve en este ejemplo que ha de tenerse en cuenta la proporción de tres cantidades (cierta cantidad de obreros, cierta cantidad de metros, otra cantidad de obreros) para determinar una cuarta cantidad (otra cantidad de metros).

Se puede también, dada *cierta cantidad de obreros,* que hacen *cierta cantidad de metros de trabajo,* en *cierta cantidad de horas,* preguntar, dada *otra cantidad de obreros,* que trabajan durante *otra can-*

tidad de horas, qué otra cantidad de metros de trabajo se hará. *

Se ve en este nuevo ejemplo que si se ha resuelto previamente el problema precedente, es decir, si se ha encontrado la otra cantidad de metros hecha por otra cantidad de obreros en el mismo tiempo, se hallará entonces en presencia de tres términos conocidos y de un cuarto que ha de hallarse, lo que se establecerá diciendo: «Dada *cierta cantidad de metros de trabajo*, hecha en *cierta cantidad de horas*, por la otra cantidad de obreros, conviene buscar, dada *otra cantidad de horas*, qué *otra cantidad de metros* harán esos mismos obreros.

Se llaman *reglas de tres* las que suministran el medio de resolver unos problemas que se pueden reducir á la averiguación de una cuarta proporcional.

Se llama *regla de tres simple* la que permite reducir un problema á la averiguación del cuarto término de una proporción, conociendo los otros tres y cuando cada uno de los términos se compone de un solo número. Por ejemplo; una regla de tres se llama simple cuando puede reducirse á una fórmula de este género $2 : 4 :: 8 : x$.

Se llama *regla de tres compuesta* la que permite reducir un problema á la averiguación del cuarto término de una proporción, conociendo los otros tres y cuando uno ó varios términos están formados de varios números. Por ejemplo; una regla de tres se llama compuesta cuando puede reducirse á una fórmula de este género $2 \times 3 : 4 \times 5 :: 18 : x$.

Importa observar que las cantidades que figuran en la proporción han de ser dos á dos de la misma especie. En el primer ejemplo que hemos dado hemos visto

cierta cantidad *de obreros* hacer cierta cantidad de *metros*
otra cantidad *de obreros* hacer otra cantidad de *metros*

en el mismo tiempo.

En el segundo ejemplo hemos visto
en cierta cantidad *de horas* cierto número de *metros* hechos
en otra cantidad *de horas* otro número de *metros* hechos

por la misma cantidad de obreros.

Cuando la cantidad buscada aumenta ó disminuye á medida que aumenta ó disminuye la cantidad de que depende, la regla de tres se llama *directa*.

Cuando la cantidad buscada aumenta á medida que disminuye la cantidad de que depende, ó disminuye á medida que aumenta la cantidad de que depende, la regla de tres se llama *inversa* ó *indirecta*.

Regla de tres simple directa

Se ve por lo que precede que podemos llegar á resolver gran número de problemas, preguntándonos simplemente cuál es la relación entre dos cantidades. Una vez notada esta relación, se sabe que las dos cantidades dependen una de otra, y que si una llega á ser, por ejemplo, cierto número de veces mayor, la otra llegará á ser ese mismo número de veces mayor igualmente; lo que se expresa diciendo que las dos cantidades *varían en la misma relación directa ó serán directamente proporcionales*, ó lo que se expresa todavía de una manera general diciendo que si dos cantidades dependen directamente la una de la otra, á toda variación en cierto sentido del valor de una de ellas corresponde una variación en ese mismo sentido del valor de la otra.

Una regla de tres simple directa consiste en que, dadas dos cantidades que tienen entre sí cierta relación directa, y dado un segundo valor de una de las cantidades, encontrar el segundo valor (desconocido) correspondiente de la otra. Por ejemplo; dada una cantidad de 10 *obreros,* que hacen una cantidad de 4 *metros* de trabajo en ciertas condiciones, si damos otro valor á la cantidad de los obreros, si, por ejemplo, elevamos su valor, es decir, á 20 *obreros,* podremos preguntarnos *qué cantidad (desconocida) de metros* harán esos 20 obreros en las mismas condiciones (la misma fuerza de cada obrero, el mismo tiempo, etc.).

Sabiendo que la cantidad de los metros es proporcional á la de los obreros, concluiremos que si la cantidad de los obreros cambia *en cierta relación,* la cantidad de los metros deberá cambiar *proporcionalmente,* lo que expresaremos

$$\frac{x \text{ metros}}{4 \text{ metros}} = \frac{20 \text{ obreros}}{10 \text{ obreros}}$$

y sabemos que x, cuarta proporcional, es igual al producto de los medios 20×4, dividido por el extremo conocido 10; $\frac{20 \times 4}{10} = 8$ metros.

Podremos decir además «*La regla de tres directa consiste en que la incógnita (segundo valor de una de las cantidades) es igual al primer valor de esta cantidad multiplicada por la relación directa del segundo valor de la otra cantidad al primer valor de esta otra cantidad.*

Reducción á la unidad

Lo que precede puede demostrarse muy sencillamente por el método llamado de *reducción á la unidad.* Este método consiste para resolver un problema, en buscar primeramente lo que llega á ser una cantidad cuando otra es reducida á la unidad, antes de tomar otro valor.

En el ejemplo que precede podremos raciocinar como sigue:

10 obreros hacen. . . . . . . 4 metros

1 obrero hará 10 veces menos, ó $\frac{4 \text{ metros}}{10}$

20 obreros harán 20 veces más, ó $\frac{4 \text{ metros} \times 20}{10}$

Regla de tres simple inversa

Una regla de tres simple inversa consiste en, dadas dos cantidades que tengan entre sí cierta relación inversa, y dada un segundo valor de una de las cantidades, encontrar el segundo valor (desconocido) correspondiente del otro.

Por ejemplo, un andador hace cierto camino en 20 *etapas* de 4 *horas. ¿Cuántas etapas* habría de hacer si no caminara más que 2 *horas* por etapa?

Se ve en seguida que la cantidad de etapas aumenta á medida que la cantidad de horas disminuye. Sabiendo esto, concluiremos que si la cantidad de horas cambia *en cierta relación,* la cantidad de las etapas habrá de cambiar *en una relación inversa,* de modo, que en lugar de escribir

$$\frac{\text{2.° valor (desconocido) de las etapas}}{\text{1.}^{\text{er}}\text{ valor de las etapas}} = \frac{\text{2.° valor de las horas}}{\text{1.}^{\text{er}}\text{ valor de las horas}}$$

se escribirá

$$\frac{\text{2.° valor (desconocido) de las etapas}}{\text{1.}^{\text{er}}\text{ valor de las etapas}} = \frac{\text{1.}^{\text{er}}\text{ valor de las horas}}{\text{2.° valor de las horas}}$$

ó

$$\frac{x \text{ etapas}}{20 \text{ etapas}} = \frac{4 \text{ horas}}{2 \text{ horas}}$$

y sabemos que la cuarta proporcional es igual al producto de los medios 20×4, dividida por el extremo conocido 2; $\frac{20 \times 4}{2} = 40$ etapas.

Podremos decir todavía «*La regla de tres simple inversa consiste en que la incógnita (segundo valor de una de las cantidades)* es igual *al primer valor de esta cantidad multiplicada por la relación inversa del segundo valor de la otra cantidad al primer valor de esta otra cantidad, es decir, por la relación del primer valor de la otra cantidad al segundo valor de esta otra cantidad.*

Para resolver el problema anterior por el método de reducción á la unidad, se raciocinará como sigue:

Si para recorrer cierto camino por etapas de 4 horas cada una se necesitan.	20 etapas
por etapas de 1 hora cada una habrá 4 veces más etapas ó	20 etapas $\times$ 4
y por etapas de 2 horas cada una habrá 2 veces menos etapas ó. . .	$\frac{20 \text{ etapas} \times 4}{2}$

Regla de tres compuesta

Una regla de tres compuesta consiste en, dadas 3 ó más cantidades que tengan entre sí ciertas relaciones directas ó inversas, y dadas unos segundos valores de todas esas cantidades excepto una, hallar el *segundo valor (desconocido) correspondiente de esta última cantidad.*

Hemos visto en un párrafo anterior, que para resolver problemas de ese género conviene variar las cantidades sucesivamente.

Por ejemplo, dada una cantidad de 4 *metros* de trabajo, hecha por una cantidad de 10 *obreros* en 9 *horas* en ciertas condiciones, podremos preguntarnos *qué cantidad (desconocida) de horas* habrán de trabajar 20 *obreros* para hacer 6 *metros* en las mismas condiciones.

Primeramente haremos variar, por ejemplo la cantidad de metros, quedando la misma la cantidad de obreros, y diremos

4 *metros* se han hecho por 10 obreros en 9 horas

1 *metro* se hará por 10 obreros en 4 veces menos tiempo ó en $\frac{9^{h}}{4}$

6 *metros* se harán por 10 obreros en 6 veces más tiempo ó en. . . . . $\frac{9^{h} \times 6}{4}$.

y diremos en seguida, haciendo variar la cantidad de obreros

6 ^{m} se hacen por 10 *obreros* en $\frac{9^{h} \times 6}{4}$

6 ^{m} se hacen por 1 *obrero* en 10 veces más tiempo ó en. . $\frac{9^{h} \times 6 \times 10}{4}$

6 ^{m} se harán por 20 *obreros* en 20 veces menos tiempo ó en $\frac{9^{h} \times 6 \times 10}{4 \times 20}$

Como se ve, la regla de tres compuesta puede reducirse á dos ó más reglas de tres simples sucesivas, y diremos: «*La regla de tres compuesta consiste en* *que la incógnita (segundo valor de una de las cantidades cuando hay más de dos) es igual al primer valor de esta cantidad multiplicada por las relaciones directas de los dos valores correspondientes de las cantidades directamente proporcionales, y multiplicada por las relaciones inversas de los dos valores correspondientes de las cantidades inversamente proporcionales».*

En el ejemplo que hemos escogido, la incógnita, *segundo valor (que se ha de hallar) de horas* de trabajo, es igual al primer valor (9^{h}) de esta cantidad, multiplicada por la relación directa de los dos valores correspondientes de las cantidades directamente proporcionales $\dfrac{6 \text{ metros } (2.^{\circ} \text{ valor de los m.})}{4 \text{ metros } (1.^{\text{er}} \text{ valor de los m.})}$ y multiplicada por la relación inversa de los dos valores correspondientes de las cantidades inversamente proporcionales $\dfrac{20 \text{ obreros } (2.^{\circ} \text{ valor de obreros})}{10 \text{ obreros } (1.^{\text{er}} \text{ valor de obreros})}$.

Para evitar todo error, conviene recordar que, en el establecimiento de las relaciones directas, los *primeros valores* han de figurar siempre como *denominadores* y los *segundos valores* como *numeradores,* y de esta manera podremos enunciar el razonamiento anterior como sigue:

El *segundo valor de las horas* (incógnita buscada) es igual al primer valor de las horas, multiplicado por *la relación directa del segundo valor de los metros con el primer valor de los metros,* siendo esas cantidades directamente proporcionales á las de las horas, puesto que el número de las horas de trabajo aumenta cuando aumenta el número de los metros que se han de hacer; y multiplicada por la *relación inversa del segundo valor de los obreros con el primer valor de los obreros* (es decir, multiplicada por la *relación del primer valor de los obreros con el segundo valor de los obreros)*, siendo esas cantidades inversamente proporcionales á las de las horas, puesto que el número de las horas de trabajo disminuye cuando aumenta el número de los obreros.

Vemos también por lo que precede, que los problemas de este género pueden resolverse siempre por una continuación de reducciones á la unidad, puesto que la regla de tres compuesta puede reducirse siempre á dos ó más reglas de tres simples sucesivas, y todo lo que puede resolverse por una regla de tres simple, puede ser reducido al método de reducción á la unidad.

Averiguación de una cuarta proporcional, regla de tres, reducción á la unidad, son nombres diferentes dados á formas diferentes de un mismo método. Conviene comprender bien que todas esas formas diferentes se refieren muy sencillamente á la noción de relación por cociente *(relación geométrica)* y á la noción de proporción por cociente *(proporción geométrica)*, que de ellas se deriva. Del mismo modo veremos que otros problemas se refieren á la noción de relación por diferencia *(relación aritmética)* y á la de proporción por diferencia *(proporción aritmética)*, que de ellas se deriva. Estos problemas pueden resolverse fácilmente utilizando nuestros conocimientos sobre la averiguación de una cuarta proporcional aritmética, que, como sabemos, es igual á la suma de los medios, disminuída del extremo conocido, lo mismo que para encontrar la cuarta proporcional geométrica, nos ha sido preciso dividir el producto de los medios por el extremo conocido.

La proporcionalidad, como todos los conocimientos, es un hecho experimental

Es importante observar que la proporcionalidad directa ó inversa (igualdad de dos relaciones) resulta de la experiencia. Es un hecho que ha de hacerse constar ó ha de comprobarse cuidadosamente antes de entregarse á las operaciones de cálculo, que son sus resultados. De no hacerlo así, se corre el riesgo de incurrir en errores procedentes de considerar como iguales dos relaciones desigualess, ó como directamente proporcionales dos relaciones que lo eran á la inversa. Para reconocer si hay ó no proporcionalidad entre dos suertes de cosas y para reconocer la naturaleza de una proporción, es preciso estudiar las relaciones existentes entre esas cosas. Unos cálculos exactos conducen á un resultado exacto ó inexacto, según que sus proporciones y su naturaleza se hayan establecido de una manera exacta ó inexacta.

Particiones proporcionales

Gran cantidad de problemas pueden resolverse reduciéndolos directa ó inmediatamente á la averiguación de una cuarta proporcional. Hay especialmente los llamados de *partición proporcional* que se pueden resolver también por el método de reducción á la unidad.

Sea, por ejemplo, repartir un número en partes proporcionales á números dados, á saber: 45 kilogramos de harina para ser transportados proporcionalmente á sus pesos respectivos por un hombre que pesa 70 kilos, una jovencita que pesa 50 kilogramos y un niño que pesa 30 kilogramos, es decir, de manera que cada uno lleve tanto más cuanto más pese, y que las tres personas transporten los 45 kilogramos. ¿Cuánto llevará cada una?

Razonando por el método de reducción á la unidad, diremos:

Si en lugar de 3 personas de 70, 50 y 30 kilogramos, se tratara de una sola que pesara $70 + 50 + 30$ kilogramos, sea 150 kilogramos, llevaría por sí sola los 45 kilogramos. Si pesara 1 kilogramo llevaría, 150 veces menos, ó $\frac{45}{150}$; pesando 70 kilogramos, llevaría 70 veces más, ó $\frac{45 \times 70}{150} = 21^{\text{k}}$; pesando 50 kilogramos, llevaría $\frac{45 \times 50}{150} = 15^{\text{k}}$; y pesando 30 kilogramos, llevaría $\frac{45 \times 30}{150} = 9^{\text{k}}$; lo que equivale á multiplicar sucesivamente 45 por $\frac{70}{150}$, $\frac{50}{150}$ y $\frac{30}{150}$. Respuesta: El hombre llevará 21^{k}, la jovencita 15^{k} y el niño 9^{k}.

Podemos, en consecuencia, enunciar la regla siguiente: *Se reparte un número en partes proporcionales á números dados multiplicando respectivamente el número que ha de repartirse por la relación de cada uno de los números dados con la suma de esos números.*

Es fácil de demostrar que las operaciones que preceden se reducen á la averiguación de cuartas proporcionales. En efecto, sabemos que en una sucesión de relaciones iguales, la suma de los numeradores dividida por la suma de los denominadores da una relación igual á cada una de las relaciones dadas, lo que puede expresarse por la siguiente proporción:

$$\frac{\text{Suma de los numeradores de relaciones iguales}}{\text{Suma de los denominadores de esas relaciones}} = \frac{\text{Numerador de una de esas relaciones}}{\text{Denominador de esa relación}}$$

Si en esta proposición suponemos desconocido el denominador de la segunda relación, nos será fácil hallarle considerándolo como cuarta proporcional desconocida.

En el ejemplo que hemos escogido, se trataba de repartir 45 en partes proporcionales á 70, 50 y 30. Dicho de otro modo, se trataba de hallar 3 números cuya suma sea igual á 45, y tales, que la relación de 70 con el primero sea igual á la relación de 50 con el segundo, la relación de 30 con el tercero y la relación de la suma de los tres números con 45, lo que se puede expresar como sigue:

$$\frac{70+50+30}{45} = \frac{70}{1.^{a}\ \text{parte}} = \frac{50}{2.^{a}\ \text{parte}} = \frac{30}{3.^{a}\ \text{parte}}$$

Considerando la proporción

$\dfrac{70+50+30}{45} = \dfrac{70}{1.^{a}\ \text{parte}}$, esta primera parte desconocida, cuarta proporcional, será igual á

$\dfrac{45 \times 70}{70+50+30}$; del mismo modo la segunda será igual á $\dfrac{45 \times 50}{70+50+30}$ y la tercera á $\dfrac{45 \times 30}{70+50+30}$.

Observación.—Puede haber de partirse un número en partes proporcionales á enteros, fracciones ó á números fraccionarios. En este caso bastará convertir las fracciones y los números fraccionarios (lo mismo que los enteros si están acompañados de fracciones ó de números fraccionarios) en fracciones que tengan el mismo denominador, haciendo después la repartición proporcionalmente á los numeradores. En efecto, las fracciones que tienen un mismo denominador son proporcionales á sus numeradores, puesto que su relación no cambia cuando se les multiplica por su denominador, operación que hace desaparecer esos denominadores.

Particiones proporcionales simples y compuestas

Así como hay la regla de tres simple y la regla de tres compuesta, hay la partición proporcional simple y la partición proporcional compuesta. Esta última difiere del precedente en que los números proporcionales están compuestos de varios factores.

Reglas de sociedad

En una sociedad razonable, el cálculo, tal como lo hemos explicado, se utilizará en vista del mejor empleo posible de sus energías y de las energías ambientes en provecho de la especie humana. En la sociedad actual, una concepción errónea impone á los hombres un despilfarro absurdo de sus energías y de las energías ambientes, en gran detrimento de su especie. A consecuencia de esa concepción errónea, los libros de enseñanza están llenos de ejemplos tomados de prácticas detestables, que han de evitarse. En lugar de enseñar á los niños que particiones proporcionales deberían hacerse entre personas razonables, que comprenden los importantes problemas de circulación de la substancia entre los hombres, se les enseña los métodos de circulación de dinero y de explotación de los hombres entre sí. Por eso las aritméticas suelen contener un capítulo dedicado á las *reglas de sociedad.*

La regla de sociedad es sencillamente una aplicación especial de la partición proporcional; una operación por la que se reparte entre varios asociados un beneficio ó una pérdida comerciales. La partición debe hacerse proporcionalmente á la imposición y al tiempo, de tal manera, que si, por ejemplo, uno de los asociados pone en la asociación cuatro veces más dinero que otro, ha de recibir una parte cuatro veces mayor en los beneficios ó contribuir con una parte cuatro veces mayor en las pérdidas. Del mismo modo, el que participe en la asociación durante un tiempo tres veces mayor, ha de participar en una proporción triple en los beneficios y en las pérdidas.

La regla de sociedad se llama *simple* cuando los tiempos son iguales y las imposiciones diferentes, ó cuando las imposiciones son iguales y los tiempos diferentes; se llama *compuesta* cuando las imposiciones y los tiempos son diferentes.

Ejemplo de regla de sociedad simple: 3 capitalistas han conseguido que muera de hambre un inventor, prometiéndole siempre un apoyo que no le han dado nunca. Después de su muerte se reunen para explotar la invención, y aportan, el primero 7000 pesetas, el segundo 5000 pesetas y el tercero 3000 pesetas; al cabo de un año ganan 4500 pesetas. ¿Cuánto toca á cada uno? Claro es que se trata sencillamente de repartir 4500 pesetas proporcionalmente á 7000 5000 y 3000.

Otro ejemplo de regla de sociedad simple: 3 individuos ponen en común la misma suma para jugar á las carreras. El primero participa en la sociedad durante 7 meses, el segundo 5 meses y el tercero 3 meses. Hay una pérdida de 450 pesetas. ¿Cuánto se ha de descontar á cada uno? Claro es que se trata sencillamente de repartir 450 proporcionalmente á 7, 5 y 3.

Ejemplo de regla de sociedad compuesta: 3 comerciantes ponen en común, el primero 7000 pesetas durante 12 años, el segundo 5000 pesetas durante 8 años y el tercero 3000 pesetas durante 10 años. Ganan 45000 pesetas. ¿Cuánto toca á cada uno? En este ejemplo la parte del primero será proporcional á 7000×12, la del segundo á 5000×8 y la del tercero 3000×10, lo que equivale á repartir 45000 proporcionalmente á 7000×12; 5000×8 y 3000×10.

De esta manera se ve que una regla de sociedad compuesta se reduce á una regla de sociedad simple multiplicando las imposiciones por los tiempos correspondientes.

Reglas de interés

Hemos visto en la Cuarta Parte que una sociedad de individuos razonables se entenderán para trabajar en común para la circulación de la substancia y para su selección en provecho de la especie humana, y esto en toda fraternidad y sin ninguna preocupación de dinero ni de cambio. Claro es que en tal sociedad, gran número de problemas en que pierden su tiempo nuestros contemporáneos, no tendrán ya razón de ser, y entre ellos pueden incluirse los que se refieren al interés. En nuestra época, por el contrario, en que los hombres luchan y se matan *por cuestiones de dinero*, estos problemas tienen gran importancia.

Se llama *interés* de una suma el beneficio que reporta esta suma. Se llama *capital* la suma que reporta un beneficio. Se llama *renta* el interés anual de un capital. Se llama *tasa* el interés anual de un capital de 100 pesetas.

Se llama *interés simple* el interés de una suma prestada cuando no varía mientras la duración del préstamo. Se llama *interés compuesto* el interés de una suma que se aumenta periódicamente con el interés que la misma produce.

En los cálculos de interés, se suponen por comodidad, que todos los meses son de 30 días, y, por consiguiente, los años compuestos de 360 días.

Es de notar que en una sociedad razonable, habrá muchos problemas que se resolverán por las mismas reglas que los problemas de interés: tales serán los problemas razonables que sirven hoy de tipo á los problemas de interés. Tomemos un ejemplo muy sencillo. Es razonable establecer previsiones acerca de las diferentes substancias consumibles, para ver cómo se efectuará el trabajo necesario á la vida humana con el mínimum de esfuerzo. Sabiendo, por ejemplo, que en ciertas condiciones 100 kilogramos de grano producen anualmente tantos kilogramos de granos, puede preguntarse cuánto producirá aproximadamente una cantidad dada de granos en un número dado de años, consumiendo cada año todos los granos, á excepción de una cantidad igual á la cantidad inicial, y entonces se estará ante un problema análogo á un problema de interés simple. Se podía también preguntar cuánto produciría aproximadamente una cantidad dada de granos en un número dado de años, aportando todos los años los granos necesarios para la siembra del año siguiente, y entonces se estará ante un problema análogo á un problema de interés compuesto. Problemas semejantes pueden suponerse con motivo de la cría de palomas, gallinas, conejos, etc., etc. A cada categoría de problemas corresponden reglas especiales con dependencia de los datos especiales á cada categoría. Estas reglas podrán resumirse, por lo que se denomina fórmulas.

Fórmulas

Se llama fórmula (del latín FORMULA, diminutivo de FORMA=*forma*) la representación gráfica abreviada de una regla. En las fórmulas aritméticas, como se trata de representar una serie de operaciones que han de efectuarse, se usan signos convencionales habituales, y los números variables son reemplazados por letras. A continuación daremos las fórmulas usadas en la sociedad actual para resolver los problemas de interés. Estas fórmulas se determinan por medio de reglas de tres, que se pueden reducir siempre, como hemos demostrado, al establecimiento de proporciones que conducen á la investigación de cuartas proporcionales.

Interés simple

Estas reglas pueden reducirse á la regla de tres compuesta. En efecto, si llamamos A al capital, i á la tasa (interés de 100 pesetas durante un año), t al tiempo (número de años), I al interés del capital A, podremos preguntarnos: *¿Cuál es el interés* I *de un capital* A, *durante* t *años, á la tasa de* i *por* 100? y veremos en seguida que nos hallamos ante 3 cantidades que tienen entre sí relaciones directas $\left(100 \textit{ pesetas aportan en } 1 \textit{ año } 1 \textit{ peseta}\right)$; que hacemos variar 2 de esas cantidades, que se convierten en A *pesetas* y t *años*, y dados esos segundos valores de las 2 primeras cantidades, se trata de hallar el segundo valor, I, de la tercera cantidad, una peseta.

Racionando por el método de reducción á la unidad, diremos: 100 pesetas aportan en 1 año i pesetas,

1 peseta aportará en 1 año 100 veces menos ó $\frac{i}{100}$.

A pesetas aportarán en 1 año 100 veces más ó $\frac{A \times i}{100}$.

A pesetas aportarán en t años t veces más ó $\frac{A \times i \times t}{100}$.

El interés I del capital A durante t años, á la tasa de i por 100, es pues igual (suprimiendo, por simplificación como se acostumbra en las fórmulas, el signo $\times$) á $\frac{\mathrm{A\,i\,t}}{100}$ lo que se expresa por la fórmula $\mathrm{I} = \frac{\mathrm{A\,i\,t}}{100}$

Este ejemplo demuestra bien la utilidad de las fórmulas. Para resolver un problema de interés simple, basta reemplazar en la fórmula las letras por las cifras del dato.

Un problema de interés simple no se presenta siempre bajo la forma anterior. La incógnita puede ser, en efecto, el interés del capital, sino que puede ser también el capital, la tasa ó el tiempo. En estos diferentes casos se llega fácilmente á establecer la fórmula, sea por el método de reducción á la unidad sea por el álgebra si se conoce, sea sencillamente utilizando la definición de la división y las propiedades de las relaciones. Todo eso viene á ser lo mismo.

Si, por ejemplo, la incógnita es el capital, y he de resolver un problema de este género: *¿Cuál es el capital* A, *que, á la tasa de* i *por* 100, *durante* t *años aporta un interés* I? Para conocer el valor de *A*, puedo partir de la fórmula $I = \frac{A\,i\,t}{100}$. Multiplicando los dos términos de esta igualdad por 100, no cambiaré su valor, y tendré $100\,I = A\,i\,t$; dividiendo los dos términos de esta nueva igualdad por $i\,t$, no cambiaré su valor, y tendré $\frac{100\,I}{i\,t} = A$ ó

$A = \frac{100\,I}{i\,t}$, fórmula que me permitirá resolver el problema anterior y todos aquellos análogos en que la incógnita es el capital.

Del mismo modo podré establecer la fórmula $i = \frac{100\,I}{A\,t}$, que me permitirá resolver los problemas de interés simple, en los cuales la incógnita es la tasa, como, por ejemplo, el siguiente: *¿A qué tasa* i *por* 100 *se ha colocado un capital* A *que en* t *años ha repartido un interés* I?

Y podría además establecer la fórmula $t = \frac{100\,I}{A\,i}$, que me permitirá resolver el problema de interés simple, en los cuales la incógnita es el tiempo, como, por ejemplo, el siguiente: *¿Durante qué número* t *de años se ha de colocar un capital* A *á la tasa de* i *por* 100 *para que aporte un interés* I?

Como se ve, por medio de las fórmulas precedentes podremos calcular fácilmente, en todos los problemas de interés simple, el interés del capital, el capital, la tasa y el tiempo.

En general, la utilidad práctica de una fórmula consiste en evitar la necesidad de rehacer gran número de veces un razonamiento reconocido como justo, y, por tanto, suministrar un poderoso medio de economizar energía. Sin embargo, es muy peligroso emplear fórmulas sin comprender bien su valor y sin ser capaz, en un momento dado, de comprobarlas y reconstituirlas. Por lo demás, demostraremos muy fácilmente que las *fórmulas sociales actuales* son falsas, y que los hombres la aplican sin comprobarlas y tales como les han sido transmitidas por las generaciones anteriores. Cuando unas fórmulas sociales justas sean bien comprendidas y bien aplicadas, los problemas denominados «de interés simple ó compuesto del dinero», serán considerados por los hombres razonables como movimientos inútiles, y, por consiguiente, quedará libre una grandísima suma de energía humana utilizable en provecho de la humanidad.

Observación.—Si, en lugar de calcular años, se calculasen días, sería más práctico reemplazar, en las fórmulas, t por su valor en días. Un año comercial tiene 360 días, 1 día $= \frac{1}{360}$ y si se llama n el número de días, se tendrá $t = \frac{n}{360}$

De ese modo, la fórmula $I = \frac{A\,i\,t}{100}$, en la cual se trata de años, se convierte, reemplazando t por su equivalente $\frac{n}{360}$ en una fórmula $I = \frac{A\,i\,n}{36000}$ cómodo cuando se trata de días.

Interés compuesto

Sólo diremos aquí algunas palabras acerca del interés compuesto. Sabemos que se llama *interés compuesto* el de una cantidad que aumenta periódicamente con el interés que la misma produce.

Se ve inmediatamente que es posible calcular las modificaciones sucesivas del capital calculando primeramente el interés del capital durante el primer período; añadiendo esos intereses al capital, lo que da la cifra del capital aparente al segundo período; calculando en seguida los intereses de ese segundo capital para añadirlos á ese segundo capital, y así sucesivamente.

Se determina habitualmente la fórmula del interés compuesto llamando A al capital colocado á intereses compuestos, r la tasa para 1 peseta por año (en lugar de para 100 pesetas, lo que simplifica la fórmula) y n el número de años. *Se pregunta entonces lo que llega á ser, á intereses compuestos, un capital* A *durante* n *años, á la tasa de* r *por* 100, y se dice:

1 peseta aporta pasado un año	r pesetas
por consiguiente, un capital de 1 peseta llegará á ser al cabo de un año.	$1 + r$
y un capital de A pesetas, llegará á ser al cabo de un año.	$A\,(1 + r)$

Repitiendo ese razonamiento para un capital de $A\,(1 + r)$ y para saber lo que llegará á ser este capital al cabo de un año, se llegará á multiplicarle por $1 + r$ y se tendrá $A\,(1 + r)\,(1 + r)$ ó $A\,(1 + r)^2$.

Continuando así, se hará el cuadro de la transformación al capital inicial de interés compuesto al fin de cada año, y se tendrá:

$$
\begin{aligned}
&\text{Capital inicial} &&= A\\
&\text{Capital al cabo de 1 año} &&= A\,(1 + r)\\
&\text{Capital al cabo de 2 años} &&= A\,(1 + r)^2\\
&\text{Capital al cabo de 3 años} &&= A\,(1 + r)^3\\
&\text{Capital al cabo de } n \text{ años} &&= A\,(1 + r)^n
\end{aligned}
$$

Y aquí estamos delante de una progresión geométrica.

Cuando se trata de transformar esta fórmula del interés compuesto y de adaptarle á los diferentes cálculos (averiguación del interés del capital, del capital, de la tasa, del tiempo) se llega á operaciones complicadas, por ejemplo en ciertos casos á extracciones de raíces para las cuales se impone el uso de las tablas de logaritmos. Se ha llegado naturalmente á construir tablas de intereses. Todo eso ha necesitado y necesita aún un trabajo considerable.

Considerando todo el trabajo á que dan lugar todos esos cálculos, puédese, demostrando por argumentos científicos muy ceñidos, la inutilidad del dinero en una sociedad razonable (véase Cuarta Parte), comprender la locura de las generaciones actuales. Cuando esas nociones hayan penetrado en los cerebros de los hombres, no podrán menos de efectuar los movimientos lógicos que han de producir y se organizarán lógicamente.

Descuento

Las definiciones que siguen demuestran claramente que los problemas de descuento pueden reducirse á problemas de interés, reduciéndose ellos mismos á reglas de tres, que se reducen á su vez á averiguaciones de cuatro proporcionales.

En la sociedad actual, cuando un *comerciante compra mercancías*, ó *paga* inmediatamente *(al contado)*, ó promete pagar en cierta fecha que se llama *plazo*. La promesa escrita de pagar constituye el *efecto de comercio*. El vendedor se encuentra entonces en posesión, en lugar de dinero, de una promesa escrita de pago ulterior. Si tiene necesidad de dinero, se dirige á un *banquero*, al que entrega esa promesa á cambio de la cantidad indicada, disminuída de sus tanto por ciento que es su beneficio, el *descuento*. El descuento es, pues, una retención hecha ó por hacer sobre un pago efectuado de antemano, y, para calcularle en estas condiciones, basta aplicar la fórmula $I = \frac{A\,i\,t}{100}$.

Ese es el *descuento comercial ó hacia fuera.* En ese caso el prestador se cobra inmediatamente el interés de su dinero y beneficia naturalmente de ese interés. En algunos países, por el contrario, se usa no cobrar, hasta que llega el plazo, el interés del préstamo así consentido. Entonces es el prestatario quien beneficia el interés, y ese descuento se llama *descuento hacia dentro ó racional.* La palabra racional es completamente impropia; porque no hay en esas cuestiones nada de racional, sino que son absolutamente *arbitrarias* y resultan de costumbres que otras generaciones más razonables considerarán seguramente como inadmisibles en una sociedad preocupada del bienestar humano. Por lo demás, en la sociedad actual todo el mundo sabe que las cuestiones de dinero arrastran á los hombres, no hacia la unión, la concordia y la dulzura, sino hacia la desunión, la discordia y la violencia. Hasta los más próximos parientes se disputan y se matan por cuestiones de interés.

Para resolver los problemas de descuento hacia dentro, conviene preguntarse lo que llega á ser un capital, á cierta tasa, en cierto tiempo y, llamando e al descuento racional, se llega á la fórmula $e = \frac{A\,i\,t}{100 + i\,t}$.

Muchos seres humanos derrochan actualmente su existencia haciendo esos cálculos, que no tendrán utilidad práctica en una sociedad razonable.

Reglas de medianas

Hemos visto precedentemente que la media proporcional aritmética entre 2 números (ó tercera proporcional aritmética) es igual á la semisuma de esos números, y que la mediana proporcional geométrica entre 2 números (ó tercera proporcional geométrica) es igual á la raíz cuadrada de su producto.

A toda regla corresponden siempre aplicaciones prácticas, puesto que una regla no es, en último análisis, más que el resultado de la experiencia sobre el cual se ha razonado. Las reglas antes enunciadas tienen muchas aplicaciones.

Si se consideran relaciones aritméticas, una cantidad puede ser mediana, no solamente entre otras dos, sino entre varias otras, pero entre varias otras y puede decirse entonces que *la mediana entre* 2, 3, 4 *ó* 5 *ó* n *números es el cociente de la suma de esos números dividida por* 2, 3, 4 *ó* 5 *ó* n.

Ejemplo: la mediana entre los 4 números 10, 9, 15 y 14, es igual á $\frac{10 + 9 + 15 + 14}{4} = \frac{48}{4} = 12.$

Si, por ejemplo, durante 4 días consecutivos la temperatura de cierto lugar, á cierta hora, ha sido 10°, 9°, 15°, 14° (centígrados), se dirá que la mediana de temperatura en ese lugar, durante esos 4 días, á esa cierta hora ha sido de 12 grados centígrados.

En el ejemplo precedente se trata de 4 cantidades (10, 9, 15, 14) de una misma cualidad (temperatura). Los problemas de medianas no se presentan siempre bajo esta forma. En efecto, puede darse el caso de hallarse en presencia de una misma cualidad en diferentes cantidades; de una misma cantidad en diferentes cualidades y de diferentes cualidades en diferentes cantidades. Todos los precedentes son casos de mezclas. Después veremos también que se puede preguntar en qué proporción debe hacerse una mezcla.

En lo concerniente á la averiguación de una mediana se puede, conforme á lo que hemos explicado precedentemente, establecer la regla general siguiente. *Se obtiene un término medio entre varias cantidades multiplicando las cantidades por las cualidades y dividiendo la suma de los productos por la suma de las cantidades.*

En la sociedad actual la mayor parte de los problemas se presentan bajo la forma despótica de dinero, en lugar de presentarse bajo la forma de producción y de consumo razonable y fraternal. Se preguntará, por ejemplo, á cuánto cuesta por término medio el kilogramo de harina si se tienen 9 kilos, de los cuales 2 kilos han costado 0p,30 el kilo, 3 kilos 0p,35 el kilo y 4 kilos (averiados) 0p,15 el kilo.

Aplicando la regla anterior, se dirá:

2 kilos	á	0p,30 =	0p,60	1 kilogramo habrá costado por término medio
3 »	»	0p,35 =	0p,05	
4 »	»	0p,15 =	0p,60	
9			2p,25	$\frac{2p,25}{9}$ = 0p,25

De ese modo un comerciante, sabiendo que 9 kilos de harina le cuestan por término medio á 0p,25, podrá determinar á qué precio por kilogramo habrá de venderla para efectuar un beneficio. Si el precio de coste es demasiado elevado y no le permite vender en concurrencia con sus colegas, recurrirá á algún engaño de que pueda usar sin riesgo, porque en la sociedad actual el concepto de *concurrencia* conduce inevitablemente al engaño y á las querellas. Sólo el concepto de *compañerismo* puede conducir á la confianza recíproca y á la paz entre los humanos.

La averiguación de la proporción en que ha de hacerse una mezcla, conduce á un problema de partición proporcional.

Por ejemplo, en nuestros días se pregunta un comerciante en qué proporción habrá de mezclar dos productos de diferentes precios para obtener una mezcla de cierto precio intermediario. Sea, por ejemplo, unas ciruelas sanas á 40 sueldos (1) el kilogramo, y otras ciruelas averiadas á 2 sueldos el kilogramo. ¿En qué proporción habrá de hacer ese comerciante las mezclas para obtener una mezcla que le cueste á 24 sueldos el kilogramo?

Se ve inmediatamente que la diferencia entre el precio de las ciruelas caras y el precio medio (24 sueldos) constituye una ganancia y que la diferencia entre el precio medio y el precio de las ciruelas averiadas, constituye una pérdida, y que se trata sencillamente de establecer un equilibrio entre la ganancia y la pérdida, haciendo una partición inversamente proporcional á las diferencias entre los precios de cada cualidad y el precio medio.

Determinemos estas diferencias. Tendremos:

Precio medio 24 — 2, precio de las ciruelas averiadas = 22.

Precio de las ciruelas sanas 40 — 24, precio medio = 16.

Concluyo que habrá de repartir proporcionalmente á 22 y á 16 y, siendo la partición inversamente proporcional, habrá de poner 16 partes de ciruelas á 2 sueldos por 22 partes de ciruelas á 40.

(1) En Francia llaman sueldos *(sous)* á las monedas de 5 cents.

Haciendo la prueba, veo, en efecto, que si, por ejemplo, esas partes son kilogramos

16 kilos de ciruelas	á 2 sueldos	=	32 sueldos
22 » de »	á 40 sueldos	=	880 sueldos
y que 38 kilos valen			912 sueldos

1 kilo valdrá $\frac{912}{38}$ ó 24 sueldos.

Observo que podría simplificar esta relación de $\frac{16}{22}$ dividiendo los 2 términos por 2, lo que me da $\frac{8}{11}$.

Esta relación de $\frac{16}{22}$ ú $\frac{8}{11}$, una vez determinada, si quiero, por ejemplo, tener 114 kilos de ciruelas á 24 sueldos mezclando ciruelas sanas de 40 sueldos y ciruelas averiadas de 2 sueldos, me bastará repartir 114 proporcionalmente á 8 y á 11 y sé (véase particiones proporcionales, pág. 220) que se reparte un número en partes proporcionales á 2 números dados, multiplicando respectivamente el número que se ha de repartir por la relación de cada uno de los números dados á la suma de esos números. Para repartir 114 proporcionalmente á 8 y á 11, hará, pues, las dos operaciones siguientes:

$$\frac{114 \times 8}{19} = 48 \text{ y } \frac{114 \times 11}{19} = 66$$

Siendo la partición inversamente proporcional, y resultando 8, después 48, de la diferencia 16 entre el precio de las ciruelas de 40 sueldos y el precio medio, mientras que 11, después 66 resultan de la diferencia 22 entre el precio medio y el precio de las ciruelas de 2 sueldos, habré de tomar

48 kilos de ciruelas de	2 sueldos	=	96 sueldos
66 » » »	» 40 sueldos	=	2640 sueldos

Haciendo la prueba, veo, en efecto que 114 kilos costando 2736 sueldos

$$1 \text{ kilo cuesta á } \frac{2736}{114} \text{ ó á 24 sueldos.}$$

Aleaciones

Podríamos multiplicar los ejemplos, y demostrar que el conocimiento de la teoría de las relaciones y proporciones por diferencia y por cociente, permite resolver gran número de problemas variados, y cuán sensible es que este conocimiento sea utilizado en la sociedad actual para la concurrencia en vez de ser utilizado por el compañerismo; podríamos también indicar cuántas aplicaciones interesadas de estas teorías atraerán la atención de individuos razonables. Es fácil darse cuenta de que los problemas que preocupan actualmente pueden dividirse en dos categorías:

—Problemas relativos á la concurrencia entre los humanos (que se suprimirán en una sociedad razonable);

—Problemas relativos al compañerismo entre los humanos (que se multiplicarán en una sociedad razonable).

Como se ve, el estudio de la aritmética puede conducir, bien comprendidos los principios concurrencia y compañerismo, á resolver todos los problemas de que dependen los movimientos útiles y razonables para la humanidad, los movimientos inútiles é irracionales que deben ser suprimidos de las preocupaciones humanas.

Tomemos un último ejemplo. Todas las aritméticas contienen reglas para resolver los problemas «de aligación», que no son sino reglas análogas á las que hemos indicado para las mezclas. Se llama *aleación* un producto obtenído fundiendo juntos varios metales. Cuando uno de los metales es el mercurio la aleación toma el nombre de *amalgama*. Se llama *título* la relación entre la cantidad de cierto metal escogido que entra en una aleación y el peso de la aleación. Se dirá, por ejemplo, que el título de una medalla de oro es de 0,916, lo que significa que el *lingote* (trozo procedente de la fundición de metales, del holandés INGIETEN = *fundir*, del participio INGOTEN = *fundido*) que se ha utilizado para fabricar la medalla, contiene 0^{k},916 gramos de oro por kilogramo de metal.

No insistiremos sobre lo que hemos dicho acerca de las monedas y de la práctica actual de los cambios. Una de sus consecuencias es la ingerencia de la autoridad en la fabricación de las monedas, como en todo, habiendo en esto de notable que, los gobiernos se reservan el monopolio de la fabricación de monedas que han de aceptarse por un valor muy superior al de la cantidad de metal que contienen: una pieza de 5 pesetas contiene unas 2^{p},50 de plata á la tasa actual la plata. Además en muchos países no se permite la venta de objetos de *metales llamados «preciosos»* (oro y plata) sin que esos objetos ostenten una marca especial *(punzón)* por la administración que impone *títulos llamado legales*.

Concíbese que de tales disposiciones de espíritu y de tales costumbres resulten gran cantidad de problemas llamados de aligación en que los hombres actuales pierden un tiempo precioso de su corta existencia.

Al lado de esos problemas hay problemas de aligación ó de aleación interesantes para hombres razonables. En efecto, fuera de toda consideración mercantil, pueden estudiarse las diferentes propiedades de las aleaciones, variando esas propiedades según las proporciones de los metales aleados y según la naturaleza de esos metales. De esa manera se llega á obtener una aleación apropiada á tal ó cual necesidad. Se necesitan, según los casos, aleaciones duras, fusibles, sonoras, etc., y como esas aleaciones no suelen encontrarse en la naturaleza, cuando se han obtenido (y para obtenerlas) es interesante determinar *su título*, y ese título, una vez conocido, es necesario poder reproducirle, hallándonos entonces ante problemas de medianas y de particiones proporcionales.

Las aritméticas corrientes no suelen contener más que problemas en que los *títulos legales*, la *preocupación de cambio*, la *práctica de las monedas* y, de una manera general, la *concurrencia*, forman sus datos. Todo eso desaparecerá de las aritméticas futuras para ceder el puesto á los únicos problemas en que se tratará de los *títulos racionales*, según los usos racionales á que se destinen las substancias, á la *circulación de la substancia útil* y, de una manera general, al *compañerismo científico*.

Hemos dicho que el título de un lingote de oro, por ejemplo, es la cantidad de oro contenida en el lingote, ó la relación entre el peso del oro y el peso del lingote. Se puede, pues, preguntar. *¿Cómo se hallará el título de una aleación de oro de varios lingotes cuyos títulos y peso se conocen?*

Sean 2 lingotes de oro de 125 y 255 gramos de títulos 0,900 y 0,800, es decir, conteniendo el uno 0,900 gramos de oro por kilog del lingote ó 0 g,900 de oro y 0 g,800 de oro por gramo del lingote. Diré:

El lingote de 125 g		
contiene en oro		$125^{g} \times 0{,}900 = 112^{g},500$
El lingote de 255 g		
contiene en oro		$255^{g} \times 0{,}800 = 204^{g},000$
Los 2 lingotes aleados pesarán	380 g y contendrán en oro	$316^{g},500$

El título de la aleación (relación del fondo de oro con el peso de la aleación) será, pues, $\frac{316^{g},500}{380} =$ 0,832 aproximadamente.

Puede también preguntarse: *¿En qué proporción conviene alear dos lingotes de diferentes títulos para obtener un lingote de un título dado?*

Se llegará entonces al caso de la averiguación de la proporción en que debe hacerse una mezcla, y se tratará de *una partición inversamente proporcional á las diferencias de los títulos de cada lingote y del título medio.*

CUADRO RECAPITULATIVO

DE LA CUARTA PARTE

Relación.—Resultado de una comparación.

Número.—Resultado de la comparación entre una pluralidad y una de las unidades de esta pluralidad.

Relación entre dos números.—Resultado de la comparación de dos números.

Relación aritmética ó por diferencia.—Diferencia entre dos números.

Relación geométrica ó por cociente.—Cociente de la división de dos números el uno por el otro. Pudiendo las relaciones geométricas ser consideradas como fracciones, todas las reglas que se aplican á las fracciones se aplican á las relaciones geométricas.

Propiedades generales de las relaciones.—Una relación aritmética no cambia cuando se sustrae un mismo número á esos dos términos. Una relación geométrica no cambia cuando se multiplican ó dividen los dos términos por un mismo número.

Los dos términos de una relación, pueden ser enteros fraccionarios ó fracciones.

Proporción.—Expresión de la igualdad de dos relaciones.

Proporción aritmética.—Expresión de la igualdad de dos relaciones aritméticas.

Proporción geométrica.—Expresión de la igualdad de dos relaciones geométricas.

Antecedentes.—Primeros términos de cada relación de una proporción.

Consecuentes.—Segundos términos de cada relacion de una proporción.

Extremos.—Primero y cuarto términos de una proporción.

Medios.—Segundo y tercero términos de una proporción.

Propiedades generales de las proporciones.—En una proporción aritmética, la suma de los extremos es igual á la suma de los medios. En una proporción geométrica el producto de los extremos es igual al producto de los medios. De ahí se sigue que, conociendo tres términos de una proporción, se puede hallar el cuarto.

Cuarta proporcional á tres números, el cuarto término de una proporción de la cual los tres números son los tres primeros términos.

Proporciones continuas, aquellas en que los dos medios son iguales.

Tercera proporcional ó **mediana proporcional,** una de esas dos medianas iguales.

Cálculo de una cuarta proporcional aritmética desconocida.—Separar de la suma de los medios el extremo conocido.

Cálculo de una tercera proporcional aritmétrica desconocida.— Tomar la mitad de la suma de los dos extremos conocidos.

Cálculo de una cuarta proporcional geométrica desconocida.—Dividir el producto de los medios conocidos por el extremo conocido.

Cálculo de una tercera proporcional geométrica desconocida.—Tomar la raíz cuadrada del producto de los dos extremos conocidos.

Propiedad de una continuación de relaciones iguales.—La suma de un número culquiera de antecedentes (numeradores) es á la suma de sus consecuentes (denominadores) como el antecedente de una de las relaciones es á su consecuente.

Progresión.—Serie de relaciones iguales que se continuan en proporciones continuas; ó, en otros términos, continuación de números en cada uno es mediana proporcional entre el precedente y el siguiente; según que las relaciones sean aritméticas ó geométricas, estas progresiones son aritméticas ó geométricas.

Progresión aritmética ó por diferencia.—Continuación de términos que cada uno excede al precedente ó es excedido por él de un mismo número llamado diferencia ó *razón.*

Progresión geométrica ó por cociente.—Continuación de términos que cada uno contiene al precedente ó es contenido por él un mismo número de veces llamado cociente ó *razón*.

Progresion creciente, aquella cuyos términos van aumentando.

Progresion decreciente, aquella cuyos términos van disminuyendo.

Propiedades principales de las progresiones.—Conociendo el primer término y la razón, se puede hallar el valor de un término de orden cualquiera dado. Dada una progresión, se puede encontrar su razón, la suma de los términos. Conociendo los extremos y la razón puede hallarse el número de los términos. Entre dos términos dados es posible insertar un número cualquiera de términos medios, etc

Observación general.—Hemos comparado primeramente una pluralidad á una unidad que de ella formaba parte y hemos tenido números. Hemos comparado números y hemos tenido relaciones (por diferencia y por cociente). Hemos comparado relaciones entre sí y hemos llegado al estudio de dos relaciones iguales, es decir, á las proporciones (por diferencia y por cociente). Hemos comparado proporciones entre sí y hemos llegado al estudio de las proporciones continuas y al estudio de las progresiones (aritméticas y geométricas). Vamos ahora á comparar progresiones aritméticas á proporciones geométricas y llegamos al estudio de los logaritmos.

Logaritmo.—Término de una progresión aritmética corresponde á un término de una progresión geométrica cuyos otros términos corresponden respectivamente, término á término, á los otros términos de la progresión geométrica.

Propiedades de los logaritmos.—El estudio de las propiedades de los logaritmos conduce á la construcción de las tablas de logaritmos, por medio de las cuales se llega á grandes simplificaciones en los cálculos. En efecto, se llega á reemplazar multiplicaciones y divisiones por adiciones y sustracciones, elevaciones á potencias y radicaciones por multiplicaciones y divisiones. Pueden hacerse también todas las operaciones sobre las fracciones, toda vez que siendo una fracción la indicación de una división, para hallar su logaritmo bastará separar el logaritmo del denominador del logaritmo del numerador.

Reglas de 3 (aplicación de la teoría de las proporciones).— Tienen por objeto hallar el cuarto término de una progresión conociendo los otros tres.

Regla de 3 simple.—Cuando cada uno de los términos no se compome más que de un solo número, $5 : 6 :: 10 : x$

Regla de 3 compuesta.—Cuando uno ó varios términos están formados de varios números, $4 \times 3 : 6 :: 2 \times 12 : x$

Regla de 3 simple directa ó inversa.—Consiste en que, dadas dos cantidades en relación directa ó inversa y un segundo valor de una de ellas, hallar el segundo valor (desconocido) correspondiente al otro.

Regla de 3 compuesta.—Cuando hay más de dos cantidades. Puede referirse á dos ó más reglas de 3 simples sucesivas.

Reducción á la unidad.—Método que consiste, para resolver un problema, en buscar primeramente en qué se convierte una cantidad cuando otra es reducida á la unidad antes de tomar otro valor.

Particiones proporcionales.—Se reparte un número en partes proporcionales á números dados, multiplicando respectivamente el número que ha de repartirse por la relación de cada uno de los números dados á la suma de esos números. (Trátase aún aquí de buscar cuartas proporcionales).

Reglas de sociedad, de interés, de descuento pueden referirse á reglas de 3, ó á buscar cuartas proporcionales. Es sensible que á la hora presente se llenen todavía los libros de aritmética con esas aplicaciones del cálculo á la concurrencia, cuando deberían aplicarse á la organización del compañerismo. Sin embargo, las reglas de interés y de descuento, nos sirven de pretexto para explicar la importancia de las *fórmulas* de generalización que permiten resolver, no sólo un problema dado, sino todos los problemas del mismo género.

Reglas de medianas, aplicación del cálculo de una tercera proporcional aritmética. La mediana entre 2, 3, 4, ó n números se obtiene dividiendo la suma de estos números por 2, 3, 4 ó n.

Se obtiene una mediana entre varias cantidades multiplicando las cantidades por las cualidades y dividiendo la suma de los productos por la suma de las cantidades.

La busca de la proporción en que debe hacerse una *mezcla* se refiere á un problema de repartición proporcional. Tales son, por ejemplo, los problemas de aleaciones.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Sobre las relaciones, proporciones, progresiones, logaritmos, reglas de tres, particiones proporcionales, etc.

I

RELACIONES

¿Qué se entiende por relación? por relación aritmética? por relación geométrica?

¿Cómo se escribe una relación aritmética ó por diferencia? Ejemplos.

¿Cómo se escribe una relación geométrica ó por cociente? Ejemplos.

Enunciar relaciones y hacerlas escribir.

Escribir relaciones y hacerlas leer.

Demostrar que una relación aritmética no cambia cuando se aumentan ó se disminuyen sus dos términos de un mismo número.

Demostrar que una relación geométrica no cambia cuando se multiplican ó dividen sus dos términos por un mismo número.

II

PROPORCIONES

¿Qué se entiende por proporción? por proporción aritmética? por proporción geométrica? por antecedente? por consecuente? por extremos? por medios? Ejemplos.

¿Cómo se escribe una proporción aritmética? ¿Cómo se lee? Ejemplos.

¿Cómo se escribe una proporción geométrica? ¿Cómo se lee? Ejemplos.

Enunciar proporciones y hacerlas escribir.

Escribir proporciones y hacerlas leer.

Demostrar que en una proporción aritmética la suma de los dos extremos es igual á la suma de los medios.

Demostrar que en una proporción geométrica el producto de los extremos es igual al producto de los medios.

Demostrar que en una proporción se puede invertir el orden de los extremos ó de los medios, ó poner los extremos en lugar de los medios ó los medios en lugar de los extremos.

Demostrar que, conociendo los tres términos de una proporción, se puede hallar el cuarto.

¿Qué se entiende por cuarta proporcional á tres números? Ejemplos.

¿Qué se entiende por proporción continua? por medio proporcional ó tercera proporcional? Ejemplos.

Calcular cuartas proporcionales; terceras proporcionales. Enunciar las reglas.

III

Progresiones

Dar ejemplos de continuación de relaciones iguales.

Demostrar que en una continuación de relaciones iguales la suma de un mismo número cualesquiera de antecedentes (numeradores) es á la suma de sus consecuentes (denominadores) como el antecedente de una de las relaciones es á su consecuente. Ejemplos.

¿Qué se entiende por progresión? por progresión aritmética? por progresión geométrica? por razón? por progresiòn creciente? por progresión decreciente? Ejemplos.

Enunciar progresiones y hacerlas escribir.

Escribir progresiones y hacerlas leer.

Demostrar que en una continuación de relaciones iguales, si se quitan los términos de una relación de la suma de los términos correspondientes de las otras relaciones, se obtiene una relación igual á cada una de las relaciones.

Dados el primer término de una progresión aritmética creciente y la razón, calcular un término cualquiera. (Por ejemplo, el cuarto.) Regla. Demostración.

Lo mismo, si se trata de una progresión aritmética decreciente; de una progresión geométrica creciente; de una progresión geométrica decreciente.

Hallar la razón de una progresión aritmética; de una progresión geométrica. Regla. Demostración.

Hallar la suma de los términos de una progresión aritmética; de una progresión geométrica. Regla. Ejemplos.

Demostrar por qué continuación de ideas, comparando números, se llega á la idea de progresión. Ejemplos.

IV

Logaritmos

¿Qué se entiende por logaritmo?

¿Cuál es la utilidad de las tablas de logaritmos?

¿Cómo por medio de las tablas de logaritmos se puede efectuar una multiplicación? una división? una extracción de raíces?

¿Cómo se encuentra el logaritmo de una fracción?

Demostrar cómo puede utilizarse la posibilidad de encontrar los logaritmos de las fracciones.

Hacer ejercicios de multiplicación, división, elevación á potencias y extracción de raíces por medio de la tabla de logaritmos de los números de 1 á 100.

V

Reglas de tres y de reducción á la unidad

¿Qué se entiende por regla de tres? ¿A qué reglas de las proporciones corresponde?

¿Qué se entiende por regla de tres simple? compuesta? directa? inversa? Reglas. Ejemplos.

¿Qué se entiende por reducción á la unidad. Ejemplos.

Cierto número de obreros han hecho cierta longitud de obra en cierto tiempo. ¿Cuántos obreros se necesitarán para hacer otra longitud de obra en el mismo tiempo? (Los alumnos, por medio de esta pregunta, deberán imaginar por sí mismos grān cantidad de problemas variados. Algunos de esos problemas deberán ser escogidos entre las circunstancias de la sociedad actual, otros entre los de una sociedad razonable.)

Medir la altura de una casa, de un árbol, etc., por su sombra. Para esto se pone una señal (un palo horizontal, un brazo, etc.) á cierta altura sobre la casa, se mide esta altura y la altura correspondiente de la sombra, lo que permite establecer una relación entre cierta altura y su sombra. La relación entre la altura total y su sombra debe ser igual. Si, por ejemplo, un metro de altura da una sombra de $0^m,30$ centímetros, tantas veces como haya $0^m,30$ en la longitud de la sombra serán los metros en la alturs del objeto. Resolver problemas de ese género buacando una cuarta proporcional, y por la regla de tres. Medir una fracción de la altura total bastante grande, después bastante pequeña para darse cuenta de los mejores procedimientos. Verificar en seguida la altura real si es posible por una medida.

Imaginar igualmente problemas referentes á superficies, volúmenes, pesos, monedas, etc., etc. Ejemplo: Tantos obreros han labrado tal superficie en tanto tiempo, ¿qué superficie labrará otro número de obreros en otro tiempo?

Cuando se comience á estudiar la física y la química, imagínense problemas de física y de química. Ejemplo: El hierro por cada grado centígrado de aumento de temperatura aumenta 0,0000122 de longitud, 0,0000244 de superficie y 0,0000366 de volumen. Medir una regla rectangular de hierro y calcular cuánto aumentará de longitud, superficie y volumen si se elevase su temperatura tantos grados.

Busdach ha calculado que un individuo de 75 kilogramos de peso contenía unos 50 kilogramos de agua; es decir, aproximadamente $\frac{2}{3}$ de su peso. Hacer que cada alumno calcule el peso aproximado de agua que contiene.

Tomar la teoría de las reglas de tres é imaginar problemas para cada regla.

Es imposible cocinar bien si no se conocen las reglas de tres. Hacer numerosos problemas culinarios. Ejemplo: Para hacer tal plato para tantas personas se necesita tal cantidad de esto, tal de aquello, etc. ¿Qué cantidad se necesitará para tantas personas? O bien, si se ponen tales cantidades de ingredientes, ¿entre cuántas personas se podrá dividir el manjar?

Receta para la jalea de manzanas.—Pélense las manzanas, después se cuecen en triple cantidad de agua, se exprime el jugo y se pesa. Se pone en una vasija de cobre un peso de azúcar igual á $^3/_4$ del peso del jugo, y cuando el azúcar se pone perlado se le echa el jugo. Se retira del fuego cuando una cucharada de esa substancia vertida en un plato manifieste la consistencia de la goma. Lo restante de las manzanas cocidas y prensadas puede servir para hacer una mermelada.

Calcúlese la pérdida (piel, tanto por ciento). Calcúlese cuánto da de jalea y de mermelada 1 kilog. de manzanas y x gramos de azúcar. Calcúlese el azúcar que ha de añadirse á la mermelada, etc.

Hágase por medio de la regla de tres una relación científica completa sobre la fabricación de la jalea y de la mermelada de manzanas.

Todas las ramas de la actividad humana dan lugar á la aplicación de las reglas de tres. Hemos hablado de la física, de la química, de la cocina, de la agricultura, etc., que suministran problemas razonables, y del comercio, que los presenta irracionales. Se puede añadir la astronomía, la mecánica, la geodesia, etc., etc., desde el punto de vista razonable; y, desde el irracional, la aplicación de los conocimientos científicos á la concurrencia, á la matanza, etcétera. (Por ejemplo, los problemas relativos á la construcción y á la utilización de los instrumentos de guerra destinados á la destrucción humana, etcétera). Como se ve, las reglas de tres son de una aplicación muy general, lo que no es extraño, dado que contienen, bajo una forma muy clara, silogismos correctos. (Véase la lógica).

En un barco se hallan 21 hombres con víveres para 30 días. Durante una tempestad caen 3 hombres al agua y el barco se halla desamparado. Los sobre-

vivientes deciden racionarse y reducir su ración $\frac{1}{6}$.
¿Cuántos días podrán aguantar en el mar esperando socorro?

Hemos visto precedentemente el enunciado de un problema relativo á un recipiente de forma cilíndrica (pág. 184), que tiene cierta cabida lleno. Se trataba de medir el contenido en un momento dado. Suponer un cilindro de esta naturaleza sobre cuya pared interior se desea inscribir: 1.° la altura del líquido; 2.° el número de litros contenido en esta altura. Construir una tabla de cabidas en las diversas alturas.

Habituarse á la práctica de la construcción de tablas, á fin de construirlas para usos especiales siempre que convenga.

Por último, en lo concerniente á los diversos problemas del género de los indicados en este párrafo, acostumbrarse, dada una regla, á imaginar el enunciado de un problema práctico y de hallar la solución del problema por la reducción á la unidad, por la busca de una cuarta proporcional. Demostrar que esos procedimientos son formas diferentes de un mismo método. Después será también conveniente ejercitarse en resolver los problemas por el álgebra.

VI

Particiones proporcionales y reglas de sociedad

Léase el problema enunciado pág. 220 é imagínense problemas del mismo género con cifras y circunstancias diferentes. Resolver estos problemas por el método de reducción á la unidad. Enunciar la regla de la partición proporcional. Demostrar que las operaciones se refieren á buscar cuartas proporcionales.

Repartir números en partes proporcionales á enteros, á fracciones, á números fraccionarios.

¿Qué se entiende por reglas de sociedad? Explicar por qué en una sociedad razonable no tendrán aplicación estas reglas. ¿Cómo intervienen la suma aportada y el *tiempo* en estos cáculos?

Imaginar problemas de reglas de sociedad simples y compuestas del mismo género que los de las páginas 227 y 230 con cifras y circunstancias diferentes. Demostrar que se trata simplemente de repartos proporcionales.

Calcular cómo se podría repartir cierta cantidad de alimento (pan, por ejemplo) entre los alumnos de una clase proporcionalmente al peso de cada uno.

VII

Interés. Descuento

¿Qué se entiende por interés? por capital? por renta? por tasa? por interés simple? por interés compuesto? Demostrar por qué en una sociedad razonable los problemas de interés no tendrán razón de ser. Demostrar por qué en una sociedad razonable se podrá utilizar el método que sirve para resolver los problemas de interés.

¿Qué se entiende por fórmula? Dar la fórmula que sirve para resolver los problemas de interés simple y demostrar por el método de reducción á la unidad cómo se llega á esta fórmula. Dar ejemplos de problemas de interés simple de los diferentes géneros.

¿Qué se entiende por interés compuesto? Dar la fórmula que permita calcular lo que será un capital A á interés compuesto al cabo de n años.

¿Qué se entiende por mercancía? por caudal? por vencimiento? por efecto de comercio? por hacendista? por descuento? por descuento fuera? por descuento dentro? Demostrar que los problemas de descuento no tendrán razón de ser en una sociedad razonable.

¿Qué fórmulas sirven para resolver los problemas de descuento?

VIII

Medianas, mezclas, aleaciones

¿Qué se entiende por mediana entre varios nombres? Ejemplos.

¿Qué significan las frases siguientes: «La temperatura media en tal punto durante 30 días ha sido 18°», «La media de las defunciones en tal punto durante el año 1905 ha sido de 12 diarias»?

¿Cómo se obtiene una mediana entre varias cantidades? Ejemplos.

Un andarín ha caminado durante una semana. El primer día recorrió 35 kilómetros, el segundo 28, el tercero 31, el cuarto 33, el quinto 29, el sexto 25 y el séptimo 22. ¿Qué camino recorrió diariamente por término medio?

Hacer un paseo. Hacer que los alumnos cuenten el número de pasos que da cada uno en cierto tiempo hasta el momento en que se detiene, y calcular cuántos pasos da cada uno por minuto por término medio. Tomar después las cifras así obtenidas y calcular, según ellas y refiriéndolas á todos los alumnos que toman parte en el paseo, cuántos pasos por minuto da un alumno por término medio.

Midan los alumnos la capacidad de los vasos en que beben y anote cada uno cuantos bebe al día. Anótense esas cifras durante el período más largo posible, y determínese la cantidad de líquido bebida diariamente por término medio durante ese período por cada alumno.

El mismo problema para determinar, por ejemplo, el peso de pan comido por un individuo durante un período, etc.

El mismo problema para determinar la cantidad de trabajo (en longitud, superficie ó volumen, por ejemplo, marcha, labor de un campo, cavado, etcétera) efectuado por término medio por un individuo durante un período, ó por unos individuos durante este período, efectuando cada uno una cantidad de trabajo diferente.

Imaginar problemas de mezclas análogas al problema enunciado en la página 235, variando la naturaleza de los productos y los precios. Determinar el precio medio de una mezcla. Demostrar por qué tales problemas no tendrán de ser en una sociedad razonable.

¿Qué se entiende por aleación? por amalgama? por lingote? por título?

Sabemos que el título de una aleación es la relación de peso del metal llamado precioso con el peso total de la aleación. Por consiguiente, para obtener el título de una aleación se ha de dividir el peso del metal precioso por el peso de la aleación. Un objeto de oro contiene 312 gramos de oro y 104 gramos de cobre. ¿Cuál es su título?

Imaginar problemas análogos á los problemas páginas 240 y 241, variando las cifras.

¿Para qué servirá el estudio de los problemas sobre las aleaciones en una sociedad razonable?

QUINTA PARTE

—La conservación de los números.
—Los números positivos y negativos.
—La aritmética generalizada.
—Conclusión.

Para asegurarse de que los alumnos comprenden bien esta quinta parte, los profesores les harán formular problemas cuyo enunciado encontrarán en los ejercicios, y la explicación en el curso de esta quinta parte y en las partes precedentes. Es bueno habituar los alumnos á explicar en alta voz á sus camaradas sus ideas sobre los diferentes puntos reseñados.

Los números

Hemos demostrado en todo el curso de este estudio que la aritmética es una ciencia *experimental* como las otras ciencias; que, como las otras ciencias, tiene un objeto *utilitario,* y que, como las otras ciencias, es *abstracta,* es decir, que tiene por objeto el estudio de ciertas propiedades de los cuerpos, quedando voluntariamente olvidadas las otras propiedades. Puede, pues, decirse que las propiedades estudiadas son abstractas (del latín ABSTRACTUM = *separado*) lo mismo que las propiedades omitidas son voluntariamente olvidadas. Pero no debe perderse de vista que la abstracción pertenece á la física en tanto que se refiere á propiedades reales de los cuerpos. No es metafísica, porque la metafísica es lo que está fuera de la física (META = *fuera*).

La abstracción de que se ocupa la aritmética es el número, es decir, la propiedad que tienen los cuerpos de formarse en grupos, y se ha convenido en considerar un número como el resultado de la comparación de una pluralidad (grupo) con una unidad. LA ARITMÉTICA NOS SUMINISTRA EL MEDIO DE COMPARAR ÚTILMENTE TODOS LOS GRUPOS ENTRE SÍ, DE DAR NOMBRE Á TODOS LOS GRUPOS, DE EVALUAR RÁPIDAMENTE TODOS LOS GRUPOS, DE SEGUIR TODOS LOS GRUPOS EN SUS DIFERENTES MODIFICACIONES, DE DAR NOMBRES APROPIADOS Á TODOS LOS GRUPOS MODIFICADOS Y Á TODOS SUS ELEMENTOS CONSTITUTIVOS (PLURALIDADES, UNIDADES, FRACCIONES).

Conservación de los números

Hemos visto en otro lugar (*) que la substancia se

(*) Véanse la *Cartilla* y *La Substancia universal.*

conserva, y que podemos seguirla á través de todas las transformaciones sucesivas, sin que haya pérdida ni aumento.

Se sigue de ahí que, siendo la aritmética el estudio de los grupos de substancia, esos grupos pueden variar al infinito, pero los números de que están formados no pueden ser creados ni destruídos. Resultan de las reuniones diferentes, pero lo que les constituye subsiste á través de las diversas transformaciones. Se llega á concebir el número, es decir, la relación que existe entre el grupo y la unidad, como pudiendo ser puesto bajo formas muy diversas y, por consiguiente, como pudiendo ser expresado por símbolos diversos, según la manera en que se agrupen los elementos constitutivos de este número (pluralidades, unidades, fracciones) y según la manera en que se agrupe este número con otros números.

Transformaciones de los números

De una manera general las transformaciones que sufren los números pueden referirse á dos grupos de operación (síntesis, análisis) según se reunan cuerpos separados ó se separen cuerpos reunidos. Los símbolos que corresponden á la síntesis y al análisis son $+$ que indica la reunión y — que indica la separación.

Estos símbolos que son los más generales, no son los solos. Hay otros que se aplican á reuniones repetidas y á separaciones repetidas, como $\times$, como los exponentes de las potencias, como $:$, como los índices de las raíces, etc. Se llega, pues, á representarse los números acompañados de esta idea, que han de ser reunidos á otros números ó separados de otros números.

Números positivos y negativos

Se llama *número positivo* el que está precedido del signo +, y *número negativo* el que está precedido del signo —.

Esta concepción de los números negativos es muy importante, y nos permite considerar unos grupos como faltando á otros grupos. Ejemplo: Sea un manzano cargado de manzanas y un cesto que lleno de esas manzanas cada vez que lo necesito. Hay en un momento dado 6 manzanas en el cesto; me las piden y las doy. En seguida otra persona me pide 3 manzanas, y puedo considerar, no sólo que tengo el cesto vacío, sino que, cuando se llene otra vez, deberé, sobre el número que resulte, tomar 3 para darlas entonces, puesto que no puedo hacerlo al presente. Para recordarme de ello, podré, conforme á las nociones de aritmética que poseo, poner en el cesto un papelito con esta inscripción «— 3 manzanas».

Operación sobre los números positivos y negativos

Para adicionar números positivos sabemos que basta adicionarlos sin tener en cuenta el signo + que los precede y de hacer seguir la suma del signo +. En efecto, cada uno de esos números representa un número que se ha de añadir, su suma representará la suma de los números que han de añadirse.

Así mismo, la suma de números negativos que representa una suma de números que han de separarse, *para adicionar números negativos, se les adiciona* *sin tener en cuenta el signo —; y se hace preceder la suma del signo —.*

Ejemplos			
	$+ 5$		$- 5$
	$+ 10$		$- 10$
	$+ 8$		$- 8$
	$+ 43$		$- 43$
	$= + 66$		$= - 66$

Para adicionar números positivos y negativos, se hace la suma de los números positivos, la de los números negativos, se sustrae la suma menor de la mayor y se pone delante de la diferencia el signo de los números cuya suma es mayor.

En efecto, esto equivale á expresar el resultado de las operaciones parciales indicadas por los signos.

Ejemplos			
	$+ 5$		$- 5$
	$- 10$		$+ 10$
	$+ 8$		$- 8$
	$- 43$		$+ 43$
	$= - 40$		$= + 40$

Para comprender bien esto, póngase el ejemplo anterior del cesto de manzanas. El signo + indicará las manzanas que están en el cesto, y el signo — las manzanas que faltan en el cesto. Si hay, por ejemplo, 5 manzanas y 8 manzanas, y si faltan 10 y 43, faltarán en definitiva 40.

Para sustraer uno de otro dos números positivos, ó dos números negativos, ó un número positivo de un número negativo, ó un número negativo de un número positivo, se cambia el signo del número que ha de sustraerse y se adiciona conforme á las reglas precedentes.

Ejemplos

de — 20	de — 2	de + 20
sustraer — 2	sustraer — 20	sustraer — 2
= — 18	= + 18	= + 22
de — 20	de + 20	de + 2
sustraer + 2	sustraer + 2	sustraer + 20
= — 22	= — 18	= — 18

Para la multiplicación y la división indicaremos solamente aquí las reglas.

+ *multiplicado ó dividido por* + *da* +
— *multiplicado ó dividido por* — *da* +
+ *multiplicado ó dividido por* — *da* —
— *multiplicado ó dividido por* + *da* —

Estas reglas se deducen de las definiciones de las operaciones y de las de los números positivos y negativos. Por ejemplo, se dirá multiplicar — 16 por + 2 es repetir — 2 veces — 16, lo que da por producto — 32.

Ecuaciones

Se llama *ecuación* (del latín ÆQUARE = *igualar*) la expresión de la igualdad existente entre varias cantidades equivalentes. Ejemplo: 23 — 4 + 1 = 12 + 5 + 6 — 3. En efecto, si ejecuto los cálculos, puedo reducir esta ecuación á la identidad 20 = 20.

Se llamam *miembros* de la ecuación las dos partes que se encuentran á derecha y á izquierda del signo =. De ese modo el conjunto 23 — 4 + 1 es un miembro, y el conjunto 5 + 6 — 3 es el otro miembro.

Se llaman *términos* las cantidades precedidas de los signos + ó —, ó aquellos en que el signo + está sobreentedido (por ejemplo 23 y 12 que comienzan los dos miembros). Un término puede estar compuesto de varias *cantidades*. En el álgebra veremos que la expresión de una multiplicación ó de una división 14×8 ó $14 : 8$ no constituyen más que un solo término compuesto de 2 cantidades 14 y 8.

En la ecuación que hemos tomado como ejemplo, lo mismo que en la ecuación siguiente $23 + 2 = 19 + 6$, todas las cantidades son conocidas. Podemos, por el contrario, hallarnos frente á ecuaciones que contengan cantidades *desconocidas*. Ejemplos $23 + 2 = 19 + x$, ó $23 + 2 = x$.

En este último ejemplo se percibe inmediatamente el medio de hallar el valor de x. Basta adicionar los dos términos del primer miembro 23 y 2 y se tiene $x = 25$.

En el ejemplo $23 + 2 = 19 + x$ nos hallamos también ante un caso sencillo, pero más complicado que el precedente. Pueden ocurrir casos más complicados aún, en los que se necesitará una serie de operaciones para hallar el valor de una ó de varias incógnitas. Encontrar, por medio de operaciones efectuadas sobre una ecuación el valor de una ó de varias incógnitas, se llama *resolver una ecuación*.

Una ecuación puede contener incógnitas afectadas de exponentes. Así $x^2 + 12 = 28$ ó $y^2 + x^3 - 5 = 4$. El exponente más elevado de las incógnitas determina lo que se llama el *grado* de la ecuación. Así $x^2 + 12 = 28$ es una ecuación de primer grado con una incógnita, y $y^2 + x^3 - 5 = 4$ es una ecuación de segundo grado con dos incógnitas.

Lo poco que dejamos indicado demuestra ya los servicios que puede prestar el estudio de las ecuaciones para la solución de los problemas.

Solución de una ecuación de primer grado con una incógnita (indicación)

Para resolver una ecuación con una incógnita, conviene plantear todas las cantidades conocidas en uno de los miembros, y todas las cantidades desconocidas en el otro, como estaba en la ecuación $23 + 2 = x$, que acabamos de resolver.

Se trata, pues, de estudiar los medios de hacer que pase un término cualquiera de un miembro en otro. Sea, por ejemplo, la ecuación $23 + 2 = 19 + x$. Quito 19 de cada uno de los dos miembros, lo que no cambia el valor de la ecuación, y tendré $23 + 2 - 19 = x$, de donde $x = 6$.

Observaré que 19 ha pasado de un miembro al otro cambiando su signo $+$ en $-$.

Razonando así, llegaré á determinar que una cantidad, cambiando de miembro, cambia de signo (menos se convierte en más, multiplicado por se convierte en dividido por, potencia se convierte en raíz, y recíprocamente). En resumen, si se cambia una cantidad de lado.

$+$	se convierte en	$-$
$-$	»	$+$
$\times$	»	$:$
$:$	»	$\times$
$\cdot\cdot^{n}$ (potencia)	»	$\sqrt[n]{\ }$ (raíz).
$\sqrt[n]{\ }$ (raíz)	»	$\cdot\cdot^{n}$ (potencia).

Ejemplos:

$16 + x = 20$. Paso $+ 16$ al segundo miembro y tengo el valor de x, que es $x = 20 - 16$.

$x - 16 = 20$. Paso $- 16$ al segundo miembro y tengo el valor de x, que es $x = 20 + 16$.

$x \times 3$ ó $3x = 18$. Paso 3 al segundo miembro y tengo el valor de x, que es $x = 18 : 3$.

$x : 3$ ó $\frac{x}{3} = 18$. Paso 3 al segundo miembro y tengo el valor de x, que es $x = 18 \times 3$.

$x^2 = 81$. Observo que si 81 representa x elevado al cuadrado, la raíz de 81 representará x y tendré

$x = \sqrt[2]{81}$.

$\sqrt[2]{x} = 9$. Observo que si 9 representa la raíz cuadrada de x, 9 elevado al cuadrado representará x y tendré $x = 9^2$.

Aplicación de las ecuaciones á la solución de los problemas

Lo que hemos dicho de las ecuaciones tiene por objeto demostrar en qué consisten y su utilidad. En álgebra se demostrará que todo problema puede plantearse en forma de ecuación.

Ejemplo: he dado 3 manzanas, me quedan 14. ¿Cuántas manzanas tenia antes de dar parte de ellas? Diría: x manzanas $- 3 = 14$ ó $x - 3 = 14$. De donde $x = 14 + 3$.

El álgebra ó aritmética generalizada

Hemos dicho (primeros principios) que el *álgebra* es aritmética generalizada y permite calcular los números, no sólo de un sistema de numeración, sino expresados de cualquier manera. A este efecto los números se representan en álgebra por letras tomadas arbitrariamente. Para representar los datos conocidos de un problema se ha convenido en emplear las primeras letras del alfabeto a, b, c, etc. y las últimas letras... x, y, z, sirven para representar las incógnitas.

Ejemplo $a + x = b$. Se resolverá esta ecuación haciendo pasar a al segundo miembro, y se dirá $x = b - a$.

La ventaja del método algébrico consiste en que, reemplazando en un problema particular las cifras por letras, se renuncia á establecer el resultado de las operaciones, pero se describe la marcha de esas operaciones para llegar á una fórmula que permita resolver el problema y todos los del mismo género.

Ejemplo: Si quiero generalizar el problema anterior, diré. «He dado cierto número de manzanas, me quedan tantas, ¿cuántas tenía?» Si convengo en representar el número de manzanas dadas por a, el resto por b y el número desconocido por x, diré $x - a = b$. Y la fórmula de solución de todos los problemas de este género, y dando el valor de x, será $x = b + a$, que se puede traducir diciendo: «El número de manzanas que tenía es igual al resto más el número de manzanas que he dado».

Es de notar que toda fórmula matemática puede ser traducida al lenguaje ordinario, y si es verdad que las fórmulas matemáticas son una orientación hacia el lenguaje científico universal del porvenir, es indispensable á este efecto que los individuos sean capaces de comprender inmediatamente el sentido de las fórmulas.

En lo que concierne á las fórmulas del álgebra, bastará que los alumnos hayan comprendido bien que una vez un problema convenientemente transcrito en forma de ecuaciones, el estudio del álgebra suministra el medio de resolverle. Este estudio es indispensable á todos los individuos razonables que deseen hallar rápidamente lo que buscan con el mínimum de esfuerzo.

Conclusión

Hubiéramos podido demostrar aquí que la aritmética conduce á muchas otras ciencias. De hecho ninguna ciencia es posible sin el auxilio de la aritmética, ya que no puede existir ciencia fuera de las ideas de *cantidad* y de *medida.*

El estudio que hemos hecho aquí de la aritmética elemental basta para demostrar que los humanos actuales poseen las nociones necesarias para la organización de su felicidad, y que se dan actualmente un mal muy inútil para organizar su desgracia. No hay esperanza de organizar la felicidad humana fuera de la ciencia. Cada vez que un individuo más comprende esta verdad, la humanidad entera se acerca al período razonable.

CUADRO RECAPITULATIVO
DE LA QUINTA PARTE

Los grupos.—La abstracción de que se ocupa la aritmética es el número, es decir, la propiedad que tienen los cuerpos de formarse en grupos, que conviene comparar entre sí para reconocer en qué se asemejan ó en qué difieren. La aritmética nos suministra el medio de nombrar todos los grupos y de modificar sus nombres siguiendo las modificaciones de esos grupos.

El transformismo de los números.—Así comprendida la aritmética, nos permite concebir físicamente los números, grupos de cuerpos (unidades) de diferentes órdenes de grandor. Ningún número se pierde; ningún número se crea; todos los números se transforman. Conforme se explica en la Primera Parte, un número que aparece ó desaparece representa la transformación de ciertas agrupaciones de unidades en otras agrupaciones del mismo orden ó de órdenes diferentes. Se puede afirmar en el estado de nuestros conocimientos, que cuando una agrupación natural «aparece» es á expensas de otras agrupaciones que se han modificado ó han «desaparecido»; y que cuando una agrupación natural «desaparece» es en beneficio de otras agrupaciones que van á modificarse ó á «aparecer».

Números positivos y negativos.—De esa manera se pueden clasificar las transformaciones diversas de los números en dos grandes grupos de operaciones: reunión, desunión, ó síntesis y análisis, ó adición y sustracción ó + y —, y se llega á concebir los números como positivos ó negativos, es decir, como debiendo ser reunidos á otros números ó separados de otros números.

Operaciones sobre los números positivos y negativos.—*Adición.*—Se adicionan números positivos sin tener en cuenta su signo, y se hace preceder la suma del signo +

Se adicionan números negativos sin tener en cuenta su signo — y se hace seguir la suma del signo —

Se adicionan números positivos y negativos haciendo la suma de los números positivos, la de los números negativos, sustrayendo la suma menor de la mayor y poniendo delante de la diferencia el signo de los números cuya suma es la más fuerte.

Substracción.—Se sustrae el uno del otro dos números positivos, ó dos números negativos, ó un número positivo de un número negativo ó un número negativo de un positivo, cambiando el tipo del número que ha de sustraerse ó adicionando conforme á las reglas anteriores.

Multiplicación y división.

+ multiplicado ó dividido por + da +
— multiplicado ó dividido por — da +
+ multiplicado ó dividido por — da —
— multiplicado ó dividido por + da —

Ecuación.—Expresión de la igualdad existente entre varias cantidades equivalentes.

Miembros.—Las dos partes á derecha y á izquierda del signo =

Términos.—Las cantidades precedidas de los signos + ó —

Incógnitas.— Pueden estar contenidas en ecuaciones.

Solución de las ecuaciones.—Para hallar el valor de una incógnita se trata de llegar á que sea uno de los términos y que las cantidades conocidas sean el otro término.

Grado.—Las incógnitas pueden ser afectadas de exponentes. El exponente más elevado determina el grado de la ecuación.

El álgebra, aritmética generalizada, permite calcular los números expresados de cualquier manera. En las ecuaciones los datos conocidos se representan por las primeras letras del alfabeto, los datos desconocidos por las últimas letras. Operando de este modo se llega á fórmulas que permiten resolver, no solamente un problema determinado, sino todos los del mismo género.

Conclusión.—Los conocimientos humanos deben ser utilizados para la felicidad humana. En particular la aritmética, que suministra el medio de *calcular* y de *medir,* de ser conocida de todos los que deseen organizar lógicamente una sociedad razonable.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS de la aritmética generalizada

I

CONSERVACIÓN Y TRANSFORMACIÓN DE LOS NÚMEROS NÚMEROS POSITIVOS Y NEGATIVOS

Demostrar que los números se conservan y se transforman. Demostrar, por ejemplo, que una manzana comida ó podrida no es una unidad aniquilada, sino una unidad que se resuelve en cantidades de partes que se convierten en unidades de órdenes diferentes de grandor. Dar otros ejemplos.

¿Qué se entiende por números positivos y negativos? Ejemplos.

¿Cómo se adicionan números positivos? números negativos? números positivos y negativos? Ejemplos.

Las mismas preguntas para la sustracción, la multiplicación, la división. Ejemplos.

¿Qué se entiende por ecuación? por miembros de la ecuación? por términos? por incógnitas? por ecuaciones de primero, segundo y tercer grados? Ejemplos.

¿Qué se entiende «por resolver una ecuación»? Ejemplos.

Demostrar que la busca de una cuarta proporcional equivale á resolver una ecuación. Ejemplos.

Resolver las ecuaciones siguientes:

$x + 100 - 7 = 105.$

$\frac{x}{100} = 2100.$

$x - 45 - 7 = 23.$

$67 \times x = 201.$

$x^2 = 144.$

$\sqrt{x} = 11.$

Plantear ecuaciones simples y resolverlas.

Se tiene en un cesto cierto número de tomates que no se han contado. Se han dado 26 y se han recibido 15. En este momento se cuentan los tomates y se ve que hay 20. ¿Cuántos tomates había en el cesto al principio? Plantear la ecuación de este problema y resolverla.

He distribuído un saco de nueces entre 19 niños. Cada uno de ellos ha recibido 23 nueces. ¿Cuántas nueces habrá en el saco? Plantear la ecuación de este problema y resolverle.

He subido cierto número de pisos de 21 escalones cada uno y he contado 126 escalones. ¿Cuántos pisos he subido? Plantear la ecuación de este problema y resolverle.

¿Qué se entiende por álgebra?

Generalizar estos tres problemas, empleando letras en lugar de cifras, y hallar las fórmulas que permiten resolver todos los problemas del mismo género. Traducir estas fórmulas en lenguaje ordinario.

Demostrar que la base de la aritmética es experimental, que su objeto es utilitario y que es imposible ocuparse de una ciencia cualquiera sin conocer la aritmética.

Demostrar que en las sociedades irracionales actuales las ciencias en general y la aritmética en particular se utilizan en vista de la *concurrencia*, y que en la sociedad razonable han de utilizarse en vista del *compañerismo*.

Demostrar que el conocimiento de la aritmética y de la aritmética generalizada (álgebra), permite efectuar cantidades de trabajo, ganar tiempo y disminuir el esfuerzo.

PUBLICACIONES DE LA ESCUELA MODERNA

La enseñanza libre resultará estéril mientras los programas no tengan por fundamento una biblioteca formada expresamente.

Atendiendo á esta importantísima consideración, la **Escuela Moderna,** tanto para sí como con el propósito de ayudar á las que se establezcan con análogo propósito, ha fundado su biblioteca, para lo cual ha publicado ya las obras siguientes:

OBRAS PUBLICADAS

Cartilla. Primer libro de lectura.
Aventuras de Nono. Segundo libro de lectura.
Patriotismo y Colonización. Tercer libro de lectura.
Cuaderno Manuscrito. Pensamientos humanitarios.
Origen del Cristianismo. Cuarto libro de lectura.
Epítome de Gramática Española, por Fabián Palasí.
Resumen de Historia de España, por Nicolás Estévanez.
Compendio de Historia Universal, por Clemencia Jacquinet.
Tomo I. Tiempos prehistóricos hasta el Imperio Romano.
Tomo II. Edad Media y Tiempos Modernos.
Tomo III. De la Revolución francesa hasta nuestros días.
Nociones de Idioma Francés, por Leopoldina Bonnard.
La Substancia Universal, por A. Bloch y Paraf-Javal.
Geografía Física, por el Dr. De Buen. Prefacio de Elíseo Reclus
León Martín, por C. Malato.
Primer manuscrito: correspondencia escolar.
Segundo manuscrito: pensamientos humanitarios.
Psicología Etnica, por Ch. Letourneau. Cuatro tomos.
Elementos de Aritmética, por Paraf-Javal. Dos tomos.
Nociones sobre las primeras edades de la humanidad, por Georges Engerrand.
Evolución super-orgánica, por Enrique Lluria.
Pequeña Historia Natural, por Odón de Buen. Dos tomos.
Mineralogía, por Odón de Buen.
Botiquín Escolar, por A. Martínez Vargas.

Para cada volúmen 2 pesetas. *Cartilla* y *Cantos* 1 peseta. *Botiquín Escolar,* o'50. A los corresponsales 25 °/₀ descuento. A los envíos del exterior se carga el franqueo. A las escuelas descuento especial.

BOLETIN DE LA ESCUELA MODERNA. — Publicación mensual á excepción de Julio y Agosto, dedicada á la difusión de las novedades pedagógicas y al estudio de los importantes temas que abren amplia vía al progreso de la humanidad; utilísima á los profesores y á cuantas personas deseen estar al corriente de la moderna orientación del pensamiento.

Precio: 2 pesetas anuales; exterior, 2'50 pesetas

ESCUELA MODERNA

BARCELONA